

SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

Licence 3e année • Master • Écoles d'ingénieurs

ÉLECTRODYNAMIQUE APPLIQUÉE

Bases et principes physiques de l'électrotechnique

Préface de
Dominique van den Bossche

Bertrand Nogarède

DUNOD

ÉLECTRODYNAMIQUE APPLIQUÉE

Fondements et principes physiques de l'électrotechnique

ÉLECTRODYNAMIQUE APPLIQUÉE

Fondements et principes physiques de l'électrotechnique

Cours et exercices corrigés

Bertrand Nogarède
Professeur des universités à l'Institut National Polytechnique
de Toulouse (INPT-ENSEEIHT)

Préface de
Dominique van den Bossche
Head of Flight Control Actuation & Hydraulics Department, Airbus

DUNOD

Photographie de couverture : *Prototype de moteur à induit sans encoches*
© INPT/ENSEEIHT/Dominique Harribey

ISBN 2 10 007314 1

Table des matières

Préface

Une approche globale de l'électrodynamique à l'usage des élèves ingénieurs : voici un ouvrage qui arrive à point nommé pour l'industrie aéronautique.

On observe en effet depuis plusieurs décennies un grand nombre d'évolutions qui illustrent une tendance de fond, semble-t-il irréversible, vers « l'électrification » progressive des systèmes des avions. Ainsi, dans le domaine des commandes de vol, après l'introduction de la commande électrique des actionneurs hydrauliques, analogique sur Concorde puis numérique avec l'Airbus A320, on assiste maintenant à la mise en œuvre d'actionneurs de gouvernes à puissance électrique, en remplacement d'une partie des servocommandes hydrauliques, sur les programmes A380 et A400M : il est à présent véritablement question d'électrodynamique. Cette tendance n'est pas limitée à l'univers toulousain cher à l'auteur. On peut par exemple citer le F35, le dernier-né des avions de combat américains, actuellement en cours de développement, qui est lui entièrement équipé d'actionneurs de gouvernes à puissance électrique ou le Boeing 787, dont l'option plus électrique s'applique à d'autres systèmes : le conditionnement d'air ou la génération d'une partie de l'énergie hydraulique à partir de la puissance électrique.

Les motivations de l'industrie dans cette démarche sont diverses. Il s'agit en général de tirer le meilleur profit des avancées technologiques dès qu'elles montrent un niveau de maturité raisonnable. Ainsi les progrès récents dans le domaine des machines électriques et de l'électronique de puissance indispensable pour les piloter ont-ils permis de réaliser des gains significatifs dans différents domaines suivant les motivations des uns ou des autres, et en fonction de la problématique propre à leurs projets. Certains rechercheront plus de souplesse en termes d'architecture système pour atteindre les objectifs de sécurité, d'autres un gain de masse, d'autres encore un meilleur rendement énergétique ou une meilleure maintenabilité.

Au-delà de cette phase d'électrification des systèmes conventionnels des avions qui va s'étendre encore, on observe un foisonnement de concepts aérodynamiques originaux qui met en évidence de nouveaux besoins en termes d'actionneurs. Il s'agit soit de la multiplication des surfaces mobiles, ou l'adjonction de surfaces de petite taille et de bande passante élevée, soit au contraire de l'élimination de surfaces de commande discrètes au profit de structures déformables. Les technologies électrodynamiques émergentes dans le domaine des matériaux électroactifs laissent entrevoir des solutions mettant en œuvre des phénomènes physiques non encore exploités à grande échelle dans le domaine des actionneurs.

Dans ce contexte où l'on voit d'une part la diversité des besoins et d'autre part celle des technologies de conversion électromécaniques disponibles, existantes et toujours perfectibles, ou prochainement industrialisées, il est extrêmement utile de mettre à la disposition des ingénieurs cet ouvrage, comme un outil qui non seulement regroupe l'ensemble des notions fondamentales à ces concepts, mais aussi les présente sous une forme homogène et unifiée, démystifiant les technologies les plus avancées, favorisant ainsi, pour un problème donné, le choix du dispositif le plus approprié à l'optimisation de la solution.

Dominique van den Bossche
Head of Flight Control Actuation & Hydraulics Department
Airbus

Avant-propos

Quelle est la nature intime des forces s'exerçant à distance entre deux corps aimantés, ou encore, quelle est l'origine profonde des contraintes internes qui déforment la matière polarisée ? Questions fondamentales qui interpellent le physicien aux confins de son entendement de l'univers. Questions auxquelles l'ingénieur répond pourtant sans tarder en situant les conséquences de ces phénomènes au cœur même des révolutions technologiques du monde moderne. Dès lors, l'interaction électromécanique occupe une place centrale dans notre quotidien. Qu'il s'agisse de transformer le mouvement en électricité ou réciproquement de produire une action mécanique à partir d'une source électrique, les processus de conversion électromécanique de l'énergie constituent à l'évidence un vecteur de développement désormais incontournable. De la traction ferroviaire à grande vitesse aux microsystèmes, les fonctionnalités multiples du « tout électrique » se déclinent selon une grande variété de principes et de structures. En outre, l'émergence de matériaux nouveaux, doués de propriétés et de fonctionnalités inédites, constitue une puissante motivation pour envisager les futurs défis qui se profilent dans des secteurs aussi variés que l'aéronautique ou la médecine.

En tant que science des interactions entre les formes électrique, magnétique et mécanique de l'énergie, l'électrodynamique constitue un point de vue tout indiqué pour aborder l'étude de ces processus avec la généralité et la rigueur qui s'imposent. Face à la diversité croissante des phénomènes, concepts et structures potentiellement utilisables, il est en effet essentiel de disposer d'une théorie cohérente et générique traitant de l'ensemble des procédés et technologies concernés. Tel est précisément le propos du présent ouvrage. À cette fin, plutôt que de détailler la constitution ou le fonctionnnement de telle ou telle structure de convertisseur opérationnel, il s'agit plus généralement de recencer et caractériser les phénomènes physiques qui concourent à la conversion d'énergie recherchée, avant d'en envisager la mise en oeuvre concrète. Ainsi, en complément des exposés portant traditionnellement sur la question des machines électriques tournantes, la démarche proposée tend à rassembler en un même

schéma de pensée les procédés issus de l'interaction à distance de sources électromagnétiques et les concepts plus avancés dus aux propriétés électro-magnéto-élastiques de la matière, solide ou liquide.

L'ouvrage se décompose en sept chapitres traitant successivement des fondements de l'électrodynamique appliquée, des phénomènes physiques en présence et des structures de conversion élémentaires qui en découlent.

Le *premier chapitre* situe les enjeux de l'électrodynamique en rappelant brièvement ses fondements historiques et théoriques. Cette analyse préliminaire permet de justifier la portée d'une telle approche pour l'étude des convertisseurs d'énergie classiquement utilisés, ainsi que pour le développement de solutions innovantes. Quelques pistes de développements particulièrement prometteuses sont ainsi dégagées.

Les équations générales de l'électrodynamique font l'objet du *deuxième chapitre*. Le concept de champ électromagnétique, introduit dans le contexte de l'espace-temps à quatre dimensions, constitue le point de départ de la théorie proposée. La prise en compte des milieux matériels est abordée selon le double point de vue de l'électrodynamique et de la mécanique des milieux continus. Afin d'expliciter les liens fondamentaux qui unissent ces deux volets majeurs de l'électromécanique, les équations correspondantes sont présentées comme la conséquence d'un seul et même principe physique, le principe de moindre action.

En complément des lois macroscopiques locales, il convient parallèlement de décrire les conditions globales du transfert d'énergie opéré entre des sources électriques et mécaniques, sans nécessairement en expliciter les causes microscopiques. Tel est l'objet de l'approche thermodynamique exposée au *troisième chapitre*. Les analogies qui s'exercent entre les paramètres électromagnétiques, mécaniques et thermiques au sein des systèmes macroscopiques sont tout d'abord établies. Les deux premiers principes de la thermodynamique et leurs conséquences sont alors déclinés dans le contexte particulier des transformations électro-magnéto-mécaniques. L'étude des systèmes à l'équilibre quasi-statique permet d'établir une formulation générale visant au calcul systématique des forces. Une introduction à la dynamique des systèmes électromécaniques complète ce point de vue.

Sur la base des considérations précédentes, le *quatrième chapitre* propose un tour d'horizon des phénomènes d'interaction susceptibles d'être utilisés dans les machines, actionneurs et systèmes électromécaniques. Les procédés fondés sur l'interaction électromagnétique sont tout d'abord caractérisés. Face à la question centrale et non moins délicate de l'induction électromagnétique, la conception relativiste des lois de l'électromagnétisme, telle que formulée au deuxième chapitre, se révèle d'une grande utilité. Les processus d'interaction basés sur le couplage des propriétés élastiques et électromagnétiques de la matière sont ensuite décrits. La comparaison des divers effets en terme d'énergie spécifique permet enfin de préciser leurs champs d'application privilégiés.

Le cas important en pratique des convertisseurs à effets électromagnétiques est abordé au *cinquième chapitre*. Les conditions de transmission des forces engendrées à l'aide d'armatures aimantées ou bobinées, séparées par un entrefer, sont systématiquement analysées. Les concepts fondamentaux introduits au quatrième chapitre servent logiquement de base à la classification des principales structures opérationnelles de machines et d'actionneurs à effets électromagnétiques.

S'agissant de la modélisation des structures précédemment décrites, le *chapitre six* expose les fondements d'une théorie générale visant à décrire le fonctionnement des convertisseurs électromagnétiques à partir d'un modèle physique déduit des propriétés du champ. Ce modèle repose sur un traitement analytique des équations macroscopiques locales, dans le cadre d'une approximation bidimensionnelle. Les grandeurs caractéristiques du fonctionnement du convertisseur sont avantageusement exprimées en fonction de ses caractéristiques physiques. Dès lors, tirant parti des équivalences entre courants et aimantations, la théorie proposée englobe en une même formulation les principaux concepts de convertisseurs tournants à effets électromagnétiques.

Enfin, le *septième et dernier chapitre* envisage les nouvelles possibilités offertes en matière de convertisseurs à base de matériaux électroactifs. Le cas des actionneurs à effet piézoélectrique est plus particulièrement considéré. Le couplage électromécanique caractérisant les céramiques ferroélectriques de type PZT est tout d'abord décrit. Les modalités pratiques de la conversion d'énergie réalisée, en mode quasi-statique et résonnant, font l'objet d'une analyse spécifique. S'agissant de la modélisation des convertisseurs résonnants, une théorie élémentaire en est donnée en s'appuyant sur la formulation lagrangienne introduite aux chapitres deux et trois. Le potentiel d'innovation que représente cette technologie émergente est alors concrètement illustré au travers de quelques exemples de réalisation.

Liste des notations utilisées

x^λ	quadrivecteur événement (composantes contravariantes)
t	temps
c	vitesse de la lumière
ds	intervalle élémentaire entre deux événements infiniment voisins
$g_{\lambda\mu}$	tenseur fondamental
$\mathcal{L}^\lambda_\mu$	coefficients de la transformation de Lorentz spéciale
$\mathbf{e}_\lambda$	vecteurs de base (forme covariante)
$\widetilde{e}^\mu$	vecteurs de la base duale
$\mathcal{J}^\lambda$	quadrivecteur courant
ρ	densité volumique de charges libres
$\mathbf{j}$	densité de courants volumiques libres
$\mathcal{A}^\lambda$	quadrivecteur potentiel
Φ	potentiel scalaire du champ électromagnétique
$\mathbf{A}$	potentiel vecteur du champ électromagnétique
$\mathcal{F}^{\lambda\mu}$	tenseur champ électromagnétique
$\mathbf{E}$	champ électrique
$\mathbf{B}$	champ magnétique
(x, y, z)	système de coordonnées rectilignes orthonormé
$\mathcal{P}^\lambda_\mu$	coefficients de la matrice de changement de base
∂^λ	opérateur de dérivation (par rapport à une coordonnée covariante)
$\Gamma_{\rho\sigma\lambda}$	symboles de Christoffel de première espèce

${\Gamma_\rho}^\mu{}_\lambda$	symboles de Christoffel de deuxième espèce
(u^ρ)	système de coordonnées curvilignes
(r, θ, z)	système de coordonnées cylindriques
∇_λ	dérivée covariante
$\mathbf{grad}$	opérateur gradient
div	divergence vectorielle
$\mathbf{Div}$	divergence tensorielle
$\mathbf{Rot}$	tenseur rotationnel
$\mathbf{rot}$	vecteur rotationnel
Δ	opérateur laplacien (d'un champ de scalaire ou de vecteur)
$\Box$	opérateur d'alembertien
$\mathbf{P}$	polarisation électrique
$\mathbf{J}$	polarisation magnétique
$\mathbf{M}$	aimantation
ρ_p	densité volumique de charge de polarisation
$\mathbf{j}_m$	densité de courant fictif d'aimantation
σ_p	densité surfacique de charge de polarisation
$\mathbf{k}_m$	densité linéique de courant superficiel d'aimantation
$\mathbf{n}$	normale unitaire (sortante)
$\mathbf{D}$	déplacement électrique
$\mathbf{H}$	excitation magnétique
$\mathcal{M}^{\lambda\mu}$	tenseur des moments
$\mathcal{G}^{\lambda\mu}$	tenseur des excitations
ϵ_0	permittivité du vide
μ_0	perméabilité du vide
$\mathbf{u}$	vecteur déplacement
S_{ik}	tenseur de déformation
T_{ik}	tenseur des contraintes
dv	élément de volume (dans l'espace à trois dimensions)
ds_k	élément de surface (dans l'espace à trois dimensions)
F_i	force volumique
S_λ	« vecteur » déformation (notation condensée)
T_λ	« vecteur » contrainte (notation condensée)
q^λ	coordonnées généralisées
$\dot{q}^\lambda$	vitesses généralisées
S	intégrale d'action

L	fonction de Lagrange
m	masse
$\mathcal{E}_c$	énergie cinétique
$\mathcal{E}_p$	énergie potentielle
δq	variation de trajectoire
p_λ	impulsions généralisées
ρ_{m_0}	masse volumique (du milieu non-déformé)
(V)	volume
(∂V)	surface enveloppe associée au volume (V)
F_{a_i}	forces de volume données
T_{a_i}	tensions de surface imposées
Λ	densité lagrangienne du champ électromagnétique
(Ω)	hypervolume (de l'espace à quatre dimensions)
$d\omega$	élément d'hypervolume (dans l'espace à quatre dimensions)
$d\sigma_\lambda$	élément d'hypersurface (dans l'espace à quatre dimensions)
$\delta_{\lambda\mu}$	symbole de Kronecker
$\epsilon^{\lambda\mu\rho\sigma}$	symbole d'antisymétrie
$\mathcal{F}_*^{\lambda\mu}$	tenseur adjoint du champ électromagnétique
ρ_T	densité volumique de charges totales
$\mathbf{j}_T$	densité de courant total
λ_L, μ_L	constantes de Lamé
c_{iklm}	tenseur de rigidité
s_{iklm}	tenseur de souplesse
ϵ_{ik}	tenseur de permittivité électrique
ϵ	permittivité scalaire
$\chi_{e_{ik}}$	tenseur de susceptibilité électrique
χ_e	susceptibilité électrique scalaire
μ_{ik}	tenseur de perméabilité magnétique
μ	perméabilité scalaire
$\chi_{m_{ik}}$	tenseur de susceptibilité magnétique
χ_m	susceptibilité magnétique scalaire
$\rho_{e_{ik}}$	tenseur de résistivité électrique
ρ_e	résistivité électrique
$\sigma_{e_{ik}}$	tenseur de conductivité électrique
σ_e	conductivité électrique
λ_s	profondeur de pénétration

Θ	température
Θ_c	température critique d'un supraconducteur
$H_{c_{1,2}}$	intensités de champ critique d'un supraconducteur
$\mathbf{v}$	vitesse
f_λ	forces généralisées
$\mathbf{p}$	quantité de mouvement
$\Theta^{\lambda\mu}$	tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique
$\Theta^{\lambda\mu}_{(S)}$	tenseur énergie-impulsion symétrique
Π	vecteur de Poynting
$T^{(M)}_{ik}$	tenseur des contraintes de Maxwell
U_{em}	densité d'énergie du champ électromagnétique
$\mathbf{df}$	force élémentaire
e	force électromotrice
φ	flux magnétique
q_c	quantité de charge
i	intensité du courant
v_{MN}	différence de potentiel aux bornes du dipôle MN
r_{MN}	résistance ohmique du dipôle MN
C_d	capacitance du condensateur
v_a	tension appliquée par le générateur
δW	travail élémentaire
du_i	déplacement élémentaire
$d\alpha_k$	rotation élémentaire
σ	entropie volumique
Σ	entropie totale
δQ	quantité de chaleur élémentaire
f_{a_λ}	force généralisée appliquée au niveau du $\lambda^{\text{ième}}$ degré de liberté
C_{th}	capacité calorifique
U	énergie interne
F	énergie libre
H	enthalpie généralisée
G	enthalpie libre généralisée
F_{mag}	énergie libre d'origine magnétostatique
G_{mag}	enthalpie libre magnétostatique
l	inductance propre d'une bobine simple
γ_a	moment du couple extérieur appliqué

$V(q)$	énergie potentielle généralisée
$T(q, p)$	énergie cinétique généralisée
$T^*(q, \dot{q})$	coénergie cinétique généralisée
$R(\dot{q})$	fonction de dissipation
r_λ	coefficients de dissipation
$V_e(q)$	potentiel associé aux forces extérieures conservatives
$V_a(q, t)$	potentiel associé aux forces données (non conservatives)
$T_R^*(\dot{q}, t)$	terme de coénergie rendant compte de la puissance dissipée
f_{R_λ}	forces de dissipation
f_{e_λ}	forces conservatives d'origine extérieure
ξ	coefficient de frottement visqueux
k	constante de raideur
$d_{\lambda\mu}$	coefficients d'influence inverse
$l_{\lambda\mu}$	coefficients d'inductance
h_{pe}	constante piézoélectrique
h_{pm}	constante piézomagnétique
$\mathfrak{I}$	moment d'inertie
λ_{gm}	constante gyromagnétique
$\mathbf{J}_p$	polarisation magnétique permanente
$G_{\text{mag}}^{(int)}$	enthalpie d'interaction magnétostatique
$\mathbf{H}_{ext}$	champ d'excitation d'origine extérieure
$\mathbf{m}_p$	moment du dipôle magnétique permanent
$\mathbf{P}_p$	polarisation électrique permanente
$\mathbf{p}_p$	moment du dipôle électrique permanent
$\mathbf{E}_{ext}$	champ électrique d'origine extérieure
$G_{\text{elec}}^{(int)}$	enthalpie d'interaction électrostatique
J_{χ_i}	polarisation magnétique induite
m_{χ_i}	moment magnétique du dipôle polarisable
γ_k	moment du couple
E_0	intensité du champ électrique
B_0	intensité du champ magnétique
f_{elec}	force spécifique d'origine électrique
f_{mag}	force spécifique d'origine magnétique
$(\mathcal{R})$	référentiel du laboratoire
$(\mathcal{R}')$	référentiel mobile ou référentiel de repos du corps en mouvement
dl_i	élément de longueur

$\mathbf{H}_{ext_\omega}$	champ extérieur alternatif
$\mathbf{m}_\omega$	moment magnétique alternatif équivalent aux courants induits
Ω	vitesse de rotation
(r, θ, z)	système de coordonnées cylindrique
s^E_{iklm} ou $s^E_{\lambda\mu}$	(notation condensée) constantes isothermes de souplesse à champ électrique constant
d_{jik} ou $d_{i\lambda}$	(notation condensée) constantes de couplage électroélastique (constantes de charge)
ϵ^T_{ij}	constantes isothermes de permittivité électrique à contrainte imposée
λ_p	longueur d'onde magnétique (double du pas polaire)
$k(x,t)$	densité linéique de courant superficiel
$c(x)$	fonction de distribution des conducteurs (densité linéique)
C	amplitude de la fonction de distribution des conducteurs
I	amplitude des courants alternatifs
ω	pulsation
β_S	phase à l'origine des courants statoriques
β_R	phase à l'origine des courants rotoriques
β	angle de calage
α_S	angle que fait l'axe de symétrie du champ statorique (Oy_S) avec l'axe polaire de référence (Ox_S)
α_R	angle que fait l'axe de symétrie du champ rotorique (Oy_R) avec l'axe polaire de référence (Ox_S)
v_φ	vitesse de phase
m	nombre de phases
p	nombre de paires de pôles
x_{RS} ou α_{RS}	position de l'armature mobile (R) par rapport au stator (S)
i_μ	intensité du courant instantané dans l'enroulement relatif à la phase μ
ω_S	pulsation des courants statoriques
ω_R	pulsation des courants rotoriques
x_e	coefficient d'entrefer relatif
l_c	inductance cyclique
l_p	inductance propre
a	rayon d'alésage
h	hauteur (suivant Oz)
K_S	charge linéique statorique
K_R	charge linéique rotorique

χ_d	susceptibilité magnétique le long de l'axe direct $\left(Ox_{R_d}\right)$
χ_q	susceptibilité magnétique le long de l'axe en quadrature $\left(Ox_{R_q}\right)$
ξ_e	conductivité superficielle
H_d	composante du champ d'excitation le long de l'axe direct
H_q	composante du champ d'excitation le long de l'axe en quadrature
J_{χ_d}	composante de la polarisation magnétique le long de l'axe direct
J_{χ_q}	composante de la polarisation magnétique le long de l'axe en quadrature
$k_{i\lambda}$	coefficients de couplage électromécanique
$\tan\delta$	tangente de l'angle de pertes
$\dot{S}$	vitesse de déformation relative
λ_v	longueur d'onde de la vibration
M_v	masse vibrante
κ^E	constante de raideur à champ électrique constant
C^S	capacité de l'élément encastré
η	rapport de transformation électromécanique
U_x	amplitude du déplacement selon (Ox)
U_y	amplitude du déplacement selon (Oy)
v_e	vitesse d'entraînement théorique
w_x	déplacement d'un point du plan neutre selon (Ox)
w_y	déplacement d'un point du plan neutre selon (Oy)
W_y	amplitude du déplacement selon (Oy) au niveau du plan neutre
(O,x,y,z)	système de coordonnées rectilignes orthonormé

Chapitre 1

Comprendre et maîtriser les effets dynamiques de l'électricité

Dans l'acception la plus générale du terme, l'*électrodynamique* correspond à la partie de la physique qui traite des interactions entre les charges électriques en mouvement. Parmi les nombreuses conséquences de ces interactions, la transformation *électromécanique* de l'énergie constitue sans nul doute un des thèmes majeurs de l'électrodynamique appliquée. Afin de bien cerner les enjeux de cette discipline tant du point de vue scientifique que technique, ce premier chapitre propose tout d'abord un tour d'horizon de ses fondements théoriques et historiques. Cette analyse permet notamment de justifier l'intérêt d'une telle approche pour l'étude des convertisseurs d'énergie, s'agissant non seulement des solutions classiquement utilisées mais également de la mise au point d'objets innovants. L'analyse prospective conduite au terme du chapitre situe ainsi l'électrodynamique au cœur des révolutions technologiques en cours, dans des secteurs aussi variés que l'énergie, les transports ou encore la médecine.

1.1 AU CARREFOUR DE LA MÉCANIQUE ET DE L'ÉLECTRICITÉ

Englobant les concepts de l'*électrostatique* (dont le propos se limite à l'étude des actions subies par des corps électriquement chargés au repos) et de la *magnétostatique* (cas particulier où les courants demeurent constants), l'électrodynamique établit le lien fondamental qui unit électricité et magnétisme dans le contexte général

de charges électriques en mouvement. Elle constitue en cela une avancée majeure de la fin du XIXe siècle, à l'origine de nombreuses découvertes et inventions. Ces progrès concernent naturellement la maîtrise des phénomènes d'*interaction électromécanique* qui s'exercent entre des sources électromagnétiques (circuits électriques, conducteurs chargés, corps électriquement ou magnétiquement polarisés) en mouvement relatif. La théorie dynamique du champ électromagnétique que résument de manière si concise les équations de Maxwell constitue par ailleurs l'occasion d'unifier l'optique et l'électromagnétisme au sein d'une seule et même théorie ondulatoire. Et voilà que des considérations sur l'invariance galiléenne des lois de l'électromagnétisme suscitent même la remise en cause de la mécanique de Newton ; Einstein publie en 1905 sa célèbre théorie sous le titre originel *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sur l'électrodynamique des corps en mouvement) [**1**].

Dès lors, conformément au schéma de la figure 1.1, l'électrodynamique est par essence la théorie de référence qui permettra d'aborder de manière sûre et rigoureuse l'étude des objets physiques au sein desquels se mêlent les concepts les plus avancés de la mécanique, de l'électricité et du magnétisme. Cette science, dont la nature est aussi expérimentale que théorique, constitue par conséquent un fondement précieux pour l'étude des convertisseurs électromécaniques d'énergie. Le point de vue qu'elle offre est en outre d'autant plus pertinent qu'il se justifie à différents niveaux.

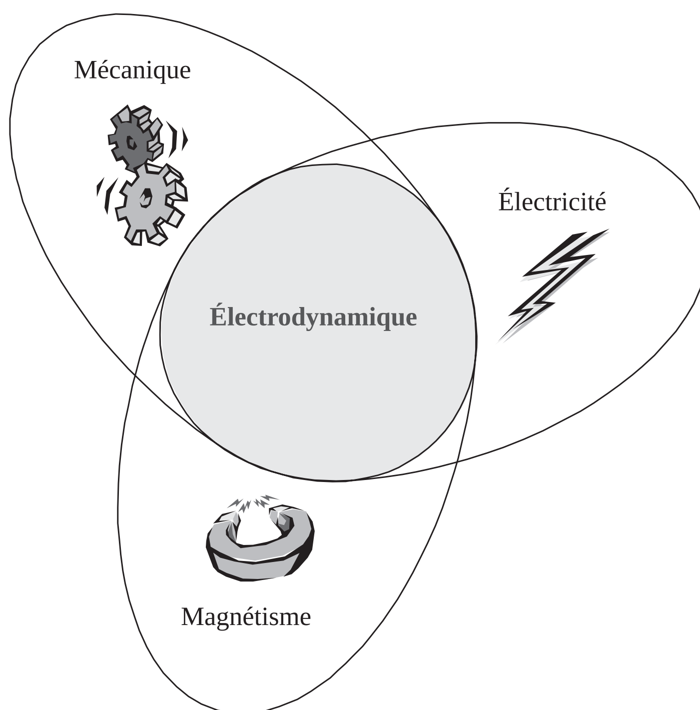


Figure 1.1 Une science résolument interdisciplinaire

1.1.1 Fondements théoriques de l'électrodynamique

En tant que science fondamentale tout d'abord, l'*électrodynamique classique* (l'électrodynamique *quantique* sort du cadre de notre exposé) offre l'avantage d'une présentation cohérente et générique des phénomènes électromagnétiques [**2**]. Le champ électromagnétique tient une place centrale dans l'interprétation des effets de couplage intervenant au sein des systèmes électromécaniques. Bien que les contextes réduits de l'électrostatique ou de la magnétostatique s'imposent souvent pour l'étude de tels systèmes (les hypothèses simplificatrices des états stationnaires ou quasi-stationnaires s'appliquent généralement, au moins en première approximation), on ne soulignera jamais assez l'unité profonde des phénomènes électriques et magnétiques. Ce lien s'exprime sans ambiguïté dès lors que les lois de l'électrodynamique sont explicitées dans le contexte de la *relativité restreinte*. C'est précisément le point de vue que nous adopterons dans la première partie de l'ouvrage. Certes, l'électromagnétisme peut être abordé dans un cadre plus classique, conformément aux exposés « prérelativistes » traditionnellement proposés sur le sujet. Cette approche reste parfaitement cohérente vis à vis de nombreux problèmes pratiques. Toutefois, certains sujets d'importance, ayant trait notamment aux effets du *mouvement*, demeurent l'occasion de questionnements et d'ambiguïtés. En particulier, les processus d'interaction électromécanique fondés sur l'*induction électromagnétique* ne peuvent être véritablement compris et analysés sans en considérer les fondements *relativistes* (cf. le cas épineux des machines à *induction homopolaire* illustré à la section 4.3.6 !).

Complément indispensable de l'électrodynamique, le point de vue *thermodynamique* permet parallèlement d'établir les liens phénoménologiques qui existent entre les grandeurs électromagnétiques, mécaniques et thermiques [**3**][**4**]. Ce point de vue s'impose dès lors que l'on cherche à décrire les conditions de transfert et de transformation de l'énergie sans pour autant en rechercher les causes profondes. La théorie qui en résulte permet, d'une part, d'introduire logiquement les divers processus et concepts de conversion utilisables et, d'autre part, d'en dégager les propriétés intrinsèques.

Enfin, le propos de l'électrodynamique ne se limite pas simplement au cas usuel d'une interaction entre solides indéformables. Une autre raison majeure justifiant le recours systématique à cette science tient à ce que l'*électrodynamique des milieux continus* établit précisément les lois macroscopiques locales du couplage électromécanique intervenant au sein même de la matière déformable, solide ou fluide [**5**][**7**]. Certes, l'électrodynamique et la mécanique des milieux continus sont aujourd'hui considérées comme deux disciplines indépendantes. Elles procèdent pourtant à l'origine d'un même élan scientifique. C'est ainsi que des noms aussi prestigieux que Cauchy, Faraday, Green, Maxwell ou Voigt sont à jamais attachés au développement commun de ces deux disciplines. En outre, la distinction commode que l'on peut envisager, à l'échelle macroscopique, entre les contraintes d'origine électromagnétique et les forces mécaniques est de fait relativement artificielle. Ces notions possèdent en effet une origine microscopique commune, i.e. l'*interaction électromagnétique*.

De ce point de vue, une voie certainement très satisfaisante résiderait dans un traitement relativiste global de la mécanique et de l'électrodynamique des milieux continus [**6**]. S'agissant cependant des applications pratiques qui orientent plus particulièrement notre propos, la vitesse de déplacement des objets macroscopiques considérés reste faible devant la vitesse de la lumière. En outre, les phénomènes de *couplages électro- ou magnéto-élastiques* les plus couramment exploités (piézoélectricité, piézomagnétisme) jouissent d'un comportement *linéaire*. Aussi, les approximations de la mécanique classique se révèlent dans ces conditions pleinement justifiées.

1.1.2 Des équations du champ aux modèles globaux

Au-delà de la compréhension des phénomènes d'interaction et de leur caractérisation intrinsèque, il s'agit ensuite d'en considérer et d'en quantifier les conséquences à l'échelle des objets opérationnels assurant une fonction électromécanique donnée (moteur, générateur, actionneur, transducteur, etc.). Les concepts de l'électrodynamique, et en particulier la notion de *champ*, offrent là encore un socle méthodologique approprié pour entreprendre rationnellement l'étape de *modélisation*. Celle-ci a pour but de caractériser et prédéterminer le comportement fonctionnel du système, tant à l'échelle locale (modèles à constantes réparties), que globale (modèles à constantes localisées). À cette fin, deux voies très distinctes se dégagent.

La première consiste à résoudre les équations macroscopiques locales régissant la distribution spatio-temporelle du champ électromagnétique au sein d'un domaine à deux ou trois dimensions. Dans le cadre d'une approche plus complète, ces équations pourront être éventuellement couplées aux lois qui gouvernent le comportement mécanique ou thermique du système étudié. Il est alors possible d'accéder avec un minimum d'hypothèses simplificatrices aux grandeurs locales (champ électromagnétique, polarisation des milieux, contraintes mécaniques, etc.) ou globales (flux, différence de potentiel, résultante des forces, etc.) qui caractérisent le fonctionnement du dispositif sous les contraintes imposées par son environnement. Néanmoins, le problème mathématique qu'il s'agit de traiter est par principe relativement lourd. Aussi, une résolution par voie *numérique* des équations initiales s'impose dans la plupart des cas. Cette résolution est fondée sur des techniques de discrétisation appropriées (par « différences » ou « éléments finis »). Le traitement du problème est de ce fait assujetti à la définition préalable d'un maillage, valable pour une configuration et une géométrie données. Ainsi, la *simulation numérique* est particulièment bien adaptée à l'étude détaillée d'un dispositif dont les caractéristiques sont connues a priori. Cet outil est aujourd'hui très largement utilisé pour valider le fonctionnement d'un concept en cours de définition ou en prédéterminer les performances globales. En revanche, lorsque l'on cherche à englober au sein d'une même représentation mathématique différentes variantes d'un même objet, le caractère générique de ce type de méthode demeure par essence relativement limité.

Fondée sur un ensemble beaucoup plus dense d'hypothèses simplificatrices, une autre voie repose sur une caractérisation résolument globale du comportement électromagnétique de l'objet étudié. Ainsi, sur la base d'une idéalisation de ses propriétés physiques et géométriques (uniformité présupposée des champs, décomposition en « éléments simples », etc.), la formulation intégrale des lois de l'électrodynamique (théorème de Gauss, loi de Faraday, etc.) ou de la mécanique (théorèmes généraux, etc.) permet d'établir des représentations « au premier ordre » formulées en termes des variables électromécaniques globales. Les théories analytiques classiquement proposées en *électrotechnique* pour l'étude des convertisseurs électromécaniques reposent sur la mise en oeuvre de tels modèles. Donnant lieu à une littérature aujourd'hui abondante, l'étude des machines électriques à partir de la théorie des *circuits* conduit ainsi à des représentations relativement synthétiques (schémas électriques équivalents, diagrammes vectoriels, etc.). Les simplifications qui en résultent se justifient pleinement lorsqu'il s'agit, par exemple, d'aborder les étapes de définition des stratégies d'alimentation et de contrôle/commande des machines électriques [**8**]. L'intérêt de ces théories est également incontestable pour décrire le comportement d'objets électromagnétiques usuels (bobines, transformateurs, machines tournantes, etc.) fonctionnant dans des conditions standard (régime permanent, comportement linéaire, etc.). En revanche, la portée opérationnelle de ces modèles atteint très rapidement ses limites dès lors que l'on cherche à rendre compte d'aspects plus avancés (effet de peau dans les conducteurs en régime de champ variable, prise en compte des non-linéarités, etc.), ou bien que l'on s'intéresse à des objets innovants. Par ailleurs, leur caractère *comportemental* est peu propice à un paramétrage du modèle en fonction des caractéristiques physiques de l'objet étudié. Leur portée en matière de conception ou de dimensionnement n'en est que plus limitée. Enfin, si la théorie des circuits constitue un outil précieux au plan pédagogique, un usage abusif de ce type de représentations peut à terme occulter la réalité physique qu'elle cherche à décrire. Le risque est alors d'enfermer les raisonnements dans un schéma de pensée élaboré autour de quelques cas d'école, réduisant d'autant la capacité de l'étudiant à confronter ses connaissances à de nouveaux problèmes sortant du cadre initial.

En vue de promouvoir l'émergence d'un point de vue intermédiaire, l'approche préconisée dans le présent ouvrage est fondée sur un traitement *analytique* des équations du champ qui gouvernent le fonctionnement des convertisseurs électromécaniques. Conformément au schéma directeur précédemment énoncé (cf. §1.1.1), ce traitement repose sur la prise en compte conjointe des lois macroscopiques locales de l'électrodynamique et de la mécanique classique. Afin d'unifier la formulation du problème, le recours à un principe *énergétique* s'impose. Aussi, les équations fondamentales des systèmes électrodynamiques seront systématiquement déduites du *principe de moindre action*. Moyennant des hypothèses de travail « raisonnables », la méthodologie proposée permettra ainsi d'établir sur la base d'une même théorie les *modèles physiques* des principaux concepts de convertisseurs. Ces modèles serviront d'une part à justifier les représentations comportementales classiquement manipulées. D'autre part, faisant explicitement référence aux paramètres physiques

de la structure (géométrie, propriétés des milieux constitutifs, etc.), ils fourniront une base solide pour aborder la problématique de *conception* des machines et actionneurs électromécaniques modernes.

1.1.3 Comprendre pour innover

La diversification des applications de l'électromécanique (du microsystème aux trains à sustentation magnétique) suscite un certain nombre de ruptures technologiques ouvrant aujourd'hui la voie à des concepts relativement variés (actionneurs répartis, matériaux électroactifs etc.). L'intégration fonctionnelle qui caractérise ces concepts, de même que la recherche de solutions optimisées au niveau *système*, poussent le concepteur à remettre progressivement en question le triptyque « moteur-transmission-charge » à la base des entraînements classiques. Au-delà des solutions pérennes disponibles « sur étagère » (machines tournantes « à courant continu », « synchrone » ou « asynchrone », etc.), il s'agit peu à peu de raisonner à l'échelle de fonctions électromécaniques globalement optimisées, grâce à une combinaison judicieuse de cellules de conversion élémentaires.

Dès lors, la conception d'objets innovants repose davantage sur la connaissance et la maîtrise des phénomènes physiques potentiellement exploitables, que sur l'application de théories standards élaborées autour de structures préexistantes. Cette tendance justifie donc pleinement le recours systématique à l'électrodynamique en tant que science de référence. Les fondements de l'électromécanique, si magistralement introduits par ses pères fondateurs, se retrouvent ainsi propulsés au coeur de l'innovation. Aussi, les progrès scientifiques et technologiques majeurs que l'on doit à cette displine constituent une puissante motivation pour en retracer brièvement les prémices.

1.2 AUX ORIGINES

Si les Égyptiens peuvent être considérés comme les pionniers de la mécanique *appliquée*, eu égard aux démonstrations aussi monumentales qu'astucieuses que nous livre leur art de bâtisseurs, c'est aux Grecs de l'antiquité que l'on attribue généralement la mise à jour des premiers effets d'attraction électrique(1) et magnétique(2). Pourtant, malgré la précocité de ces découvertes, deux millénaires devront encore s'écouler avant que l'histoire de l'électrodynamique ne subisse l'accélération décisive (au cours du XIXe siècle notamment) qui ouvre la voie aux progrès scientifiques et technologiques que l'on sait. L'histoire de ces développements sans précédent est retracée, avec la rigueur historique et épistémologique qui convient, dans de nombreux ouvrages et publications de références [**9**][**10**][**11**][**12**]. Aussi, notre propos se

(1) L'*électricité* trouve son éthymologie dans le mot grec *êlektron* qui désigne l'ambre jaune. Résultant de la fossilisation d'une résine de conifère de l'ère tertiaire, cette substance possède la propriété de s'*électriser* par frottement.

(2) C'est également au VIe siècle avant Jésus-Christ que l'effet attractif des *pierres de Magnésie* sur le fer est noté par les Grecs.

contentera-t-il d'en dégager les faits les plus marquants. Au-delà de l'exposé chronologique traditionnel, l'analyse proposée tentera de mettre en perspective les trois grandes étapes qui jalonnent le développement de la plupart des domaines de connaissance en physique appliquée, à savoir l'*observation* du phénomène, sa *conceptualisation* au travers d'une théorie connue ou originale, et enfin sa *maîtrise* technologique, donnant à l'homme de nouveaux moyens pour agir sur son environnement.

1.2.1 Le temps des premières observations

L'origine éminemment expérimentale de la science des interactions électrodynamiques tient au fait que la nature offre à l'homme, depuis la nuit des temps, le spectacle d'un ensemble de phénomènes à la portée de ses capacités premières d'observation (foudre, aurores boréales, attraction mutuelle spontanée de certaines substances, etc.). Aussi n'est-il pas étonnant que les phénomènes d'attraction précédemment mentionnés soient relatés dès les origines de la civilisation. C'est à Thalès de Milet (625-548 av. J.-C.) que l'on attribue généralement les premières expériences sur le pouvoir attracteur de l'ambre frotté. Toutefois, conformément aux idées avancées un siècle plus tard par Héraclite et Parménide, la raison est seule digne de confiance, tandis que les sens sont souvent décevants et trompeurs. Cette opinion largement développée par Platon (428-347 av. J.-C.) oriente la recherche scientifique vers la découverte des lois abstraites qui soutendent les données empiriques. Aussi, même si Aristote (384-322 av. J.-C.) réhabilite l'observation et l'expérimentation, l'inclination du monde grec antique pour la quête d'une vérité immuable confère aux premières découvertes une dimension essentiellement conceptuelle (cf. § 1.2.2). La forme d'intelligence qui correspond à cette quête théorique doit être résolument distinguée de « l'intelligence de la ruse » (la *mètis*), associée au sens et au savoir pratiques [**13**]. Ainsi, bien que les inventions mécaniques d'Archimède permirent de tenir en échec l'armée romaine durant le siège de Syracuse (212 av. J.-C.), l'historien grec Plutarque rapporte que le savant ne leur accorde que peu de valeur comparées à ses travaux en mathématiques. Cette prééminence de la pensée abstraite sur la démarche d'investigation scientifique telle que nous la concevons aujourd'hui prévaudra jusqu'à la Renaissance.

Médecin à la cour de la reine Elisabeth I, l'anglais William Gilbert (1544-1603) adopte une posture résolument nouvelle qui place l'expérience au cœur de la démarche scientifique. Dénonçant les superstitions les plus obscures et autres formes de pensée occulte afférentes à la magie de l'aimant(1), ses travaux l'amènent notam-

---

(1) Parmi les croyances les plus insolites qui entourent le mystère de l'aimant en cette fin de XVIe siècle, il en est que Gilbert rapporte en ces termes [**15**] : « ... (On dit) que l'aimant est une imposture diabolique ou que, placé sous la tête d'une femme endormie, il la tire du lit si elle est adultère... : ou qu'il a, le jour, un certain pouvoir pour attirer le fer, mais que ce pouvoir faiblit la nuit... : ou que le sang d'une chèvre libère un aimant du venin d'un diamant, de sorte que la puissance perdue est retrouvée quand l'aimant est trempé dans le sang en raison de l'antipathie entre le sang et le diamant... »

ment à distinguer les corps « électriques » (le terme naît sous sa plume) des corps magnétiques [**14**]. Il explore méthodiquement les abords de l'aimant à l'aide d'une aiguille aimantée et étudie ainsi le magnétisme de la terre. Si ces investigations le conduisent à pressentir la notion de champ(1), ces discussions sur le processus de désaimantation du fer à haute température n'en sont pas moins troublantes : plus de 300 ans avant la théorie des domaines de Weiss, il interprète le phénomène comme une modification interne de la « forme » du matériau !

Les observations relatives à l'électricité s'intensifient au cours des deux siècles suivants. Grâce aux expériences menées au milieu du XVIIe par Otto von Guericke (1602-1686), bourgmestre de Magdebourg, il est désormais possible d'obtenir les *effluves* électriques (et les étincelles qui manifestent leur existence) à l'aide de machines électromécaniques de plus en plus efficaces. Il est alors possible d'étudier plus systématiquement la nature et les propriétés de l'électricité. La distinction entre conducteurs et isolants est ainsi effective dès 1729, grâce aux travaux de Stephen Gray (1666-1736) qui expérimente le transport de la « vertu électrique » au moyen de divers matériaux. Il parvient même à la communiquer sans contact, par « influence ». Quelques années plus tard, les travaux de Charles de Cisternay Du Fay (1698-1739) conduisent à distinguer l'électricité positive (dite « vitreuse ») de l'électricité négative (dite « résineuse »), grâce aux forces non seulement attractives mais également répulsives qu'engendre leur combinaison. En 1788, Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) publie la loi suivant laquelle la force répulsive s'exerçant entre deux petites sphères chargées d'une électricité de même nature varie en raison inverse du carré de la distance séparant leur centre. Il appliquera également cette loi pour caractériser l'attraction ou la répulsion des « masses magnétiques ». Si cent ans après la publication des *Principia* de Newton, une telle loi semblait naturelle(2), il faut cependant souligner que la validité de sa démonstration tient au développement de moyens métrologiques particulièrement fiables. C'est en effet à l'issue d'études poussées sur le frottement et la torsion que Charles-Augustin de Coulomb sera en mesure de construire la balance de torsion avec laquelle il établira avec rigueur et précision la loi qui porte son nom.

L'invention de la pile électrique par Alessandro Volta (1745-1827) constitue sans nul doute la clef du développement rapide de l'électrodynamique au cours du XIXe siècle. Présenté le 9 novembre 1800 à l'occasion d'une démonstration organisée à

(1) William Gilbert reconnaît l'existence d'une force d'origine électrique (due à l'émanation « d'effluves »), mais réfute la notion de force magnétique. Il préfère parler de « forme » ou « d'âme » pour appréhender les causes du magnétisme. Néanmoins, par le biais des actions mécaniques subies par le corps d'épreuve que constitue son aiguille aimantée, il définit implicitement et détermine localement ce que nous appelons aujourd'hui le champ magnétique.

(2) Dès 1744, Joseph Priestley (1733-1804) avait suggéré une loi en raison inverse du carré de la distance. Celle-ci fut également vérifiée en 1772 par Henry Cavendish (1731-1810) à l'occasion de sa célèbre expérience sur les sphères concentriques. Toutefois, l'idée d'une action à distance s'exerçant à travers le vide mit un certain temps à être acceptée des savants français, enfermés pour certains dans un cartésianisme dogmatique.

l'Académie des Sciences devant Napoléon Bonaparte, cet instrument constitue, pour les chimistes, un moyen précieux pour la recherche de nouveaux éléments (électrolyse). Il permet en outre d'explorer le monde nouveau que représentent les courants électriques *continus*. Hans Christian Ørsted (1777-1851) construira précisément un exemplaire de la pile de Volta pour mener, dès 1807, ses études expérimentales sur l'électricité. Nommé professeur à l'université de Copenhague en 1806, au terme d'un parcours relativement singulier (reçu pharmacien en 1797, puis docteur en philosophie en 1799), Ørsted observe durant l'hiver 1819 la déviation d'une aiguille aimantée placée au voisinage d'un fil de platine connecté à une pile (tandis qu'il démontrait à ses élèves l'échauffement d'un conducteur sous l'action d'un courant électrique). Il remarque que l'aiguille tend à se placer perpendiculairement à la direction du courant lorsque la pile est mise en action(1), comme l'illustre la figure 1.2. Conscient de la portée de ses observations quant à la relation qu'elles établissent entre électricité et magnétisme(2), il publie en juillet 1820 un mémoire de quatre pages sur le sujet. Rédigé initialement en latin, dans un style quelque peu déroutant pour ses premiers lecteurs (de l'aveu même de Faraday !), le mémoire et la découverte majeure qu'il relate sont rapidement portés à la connaissance des sociétés savantes européennes.

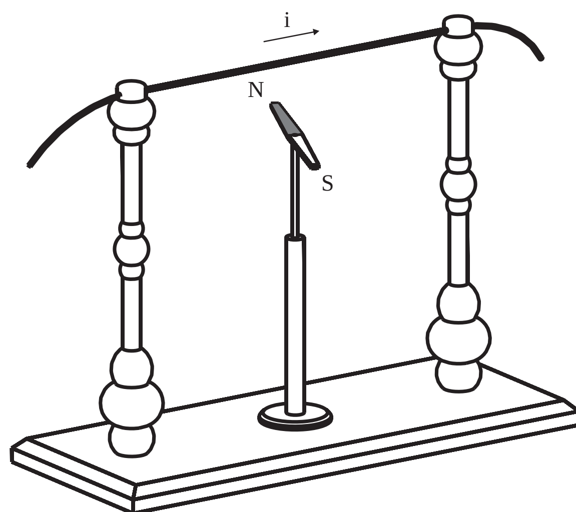


Figure 1.2 L'expérience d'Ørsted

(1) La notion de courant, de même que les notions de tension ou de circuit électrique, sont encore inconnues en 1820. Avant que ces termes ne soient introduits par Ampère quelques années plus tard, on parle, pour le courant, de « conflit » électrique.

(2) Au milieu du XVIIIe siècle, l'abbé Jean-Antoine Nollet (1700-1770), ancien assistant de Du Fay, ainsi que l'américain Benjamin Franklin (1706-1790), qui le premier assimile l'électricité à un fluide, avaient noté les effets magnétisant ou démagnétisant de la foudre sur des aiguilles aimantées. Ces faits étaient d'ailleurs connus des navigateurs dont les compas étaient parfois affectés par les éclairs orageux.

L'expérience est reproduite à l'Académie des Sciences par François Arago (1786-1853), le 11 septembre 1820, après lecture de la note d'Ørsted. Une semaine plus tard, André-Marie Ampère (1775-1836), alors professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique et membre de l'Académie depuis 1814, en donne une interprétation, ajoutant de nouveaux faits aux observations de son prédécesseur danois [**16**]. Dans un élan prodigieux, André-Marie Ampère, Jean-Baptiste Biot (1774-1862) et Félix Savart (1791-1841), sous le regard impartial de leur ainé, Pierre Simon de Laplace (1749-1827), élaborent en quelques mois les principaux résultats de la science que nous appellons aujourd'hui *magnétostatique* [**17**]. *De l'action exercée sur le courant électrique par un autre courant, le globe terrestre ou un aimant :* tel est l'intitulé du premier des deux mémoires dans lesquels Ampère consigne les principes fondateurs de l'électrodynamique. Ces découvertes prennent leur aspect définitif dans « l'immortel ouvrage » (ainsi le qualifiera Henri Poincaré) que constitue son mémoire de 1827 : *Sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*. Nul doute désormais qu'électricité et magnétisme constituent les deux facettes d'un seul et même phénomène. Preuve en est définitivement donnée lorsque Michael Faraday (1791-1867) met en évidence le phénomène d'*induction* électromagnétique [**25**]. Physicien expérimentateur de génie(1), il montre ainsi en 1831 les effets complémentaires de ceux précédemment étudiés par Øersted et Ampère. À l'aide d'un système de deux bobines enroulées sur un anneau de fer, il observe l'apparition d'un courant transitoire dans l'une des bobines lorque l'autre, reliée à une pile, en est alternativement connectée ou déconnectée. Ces courants *induits* apparaîssent également dans un solénoïde lorsque l'on y fait pénétrer un barreau aimantée [**26**]. Signalons que le phénomène d'induction électromagnétique est observé au même moment par Joseph Henry (1797-1878), alors professeur à Princeton. C'est d'ailleurs à ce dernier que l'on doit la découverte de l'*auto-induction*, en 1834.

Si les recherches précédemment décrites établissent un lien direct entre mécanique et électricité à l'échelle de corps solides en interaction électromagnétique, le XIXe siècle voit également la mise à jour des principaux phénomènes de couplage électromécaniques « locaux », associés à la *déformation* d'un corps électriquement ou magnétiquement polarisé. Considéré comme le père de la christallographie, l'abbé René Just Haûy (1743-1822) observe ainsi, en 1817, que l'électricité peut résulter de la pression exercée sur certains cristaux naturels tel que le spath d'Islande [**18**]. Antoine César Becquerel(2) (1788-1878) montra quelques années plus tard que ce

(1) En 46 années de recherche, Michael Faraday relate plus de 16 000 travaux expérimentaux dans son journal, sans qu'aucune formule mathématique n'y figure ! Outre ses travaux sur l'induction communiqués le 24 novembre 1831 à la Société Royale de Londres dans une note insérée dans les *Philisophical Transactions*, Faraday signalera en 1838 le phénomène d'électroluminescence, découvrira en 1845 le diamagnétisme et distinguera le para- du ferro-magnétisme. Ses dernières recherches concerneront l'action d'un champ magnétique sur la lumière polarisée.

(2) Grand-père de Antoine Henri Becquerel qui découvrira plus tard la radio-activité, Antoine César Becquerel consacra une part importante de son activité à l'électricité et à l'électrochimie (il étudia notamment le diamagnétisme). Il collabora avec Ampère et Biot et correspondit également avec Faraday.

phénomène concernait de manière plus générale les cristaux anisotropes. Ce n'est pourtant qu'en 1880 qu'une étude systématique de ce phénomène sera entreprise par le physicien français Pierre Curie (1859-1906) et son frère Jacques (1855-1941), alors préparateur au laboratoire de minéralogie de la Sorbonne. En 1881, l'existence d'un effet « inverse » (i.e. la déformation d'un corps sous l'action d'un champ électrique) est suggérée par Gabriel Lippmann (1845-1921) à partir de considérations thermodynamiques [**19**]. Les frères Curie le vérifient la même année et montrent que les constantes piézoélectriques du quartz sont identiques pour les deux effets direct et inverse [**20**]. C'est donc bien le même phénomène, dénommé *piézoélectricité* (1), qui se manifeste selon deux effets réciproques.

Les relations entre déformation et aimantation dans les corps ferromagnétiques feront également l'objet d'études poussées dès le début du XIXe siècle [**21**]. C'est ainsi qu'en 1842, James Prescott Joule (1818-1889) découvre la *magnétostriction* du fer. Un an après avoir formulé les lois qui portent son nom sur le dégagement de chaleur produit par le passage d'un courant électrique dans un conducteur(2), il observe l'allongement d'un barreau de fer (de même qu'une striction transversale) lorsque ce dernier est soumis à un champ magnétique longitudinal. L'effet réciproque ou effet Villari (en mémoire de celui qui étudiera le phénomène en détail en 1865), est observé par Joule lui-même dès 1847. D'autres effets de couplage magnétoélastique seront également mis en évidence par la suite (effet Wiedemann ou effet Matteucci associés à la torsion de l'échantillon).

1.2.2 Des « effluves » au photon virtuel

Notre conception du monde, et plus particulièrement celui que nous percevons au travers des phénomènes électrodynamiques ou mécaniques, est fondée sur un ensemble de concepts tels que champ, force, énergie ou corpuscule associé à une fraction élémentaire de masse ou d'énergie. Outre leur portée scientifique pour tenter « d'expliquer » les lois de la nature, ces concepts abstraits anticipent aussi très souvent l'innovation technologique (comment oser la propulsion à la « voile solaire » sans concevoir au préalable la nature corpusculaire de la lumière ?).

Face à la description des interactions entre corps matériels, la notion de *champ* joue un rôle majeur en physique, et cela dès ses origines. Si les théories correspondantes sont diverses, elles reposent sur l'idée que les actions mutuelles subies par les corps résultent des propriétés de l'espace dans lequel ils se trouvent. Ainsi, pour Aristote (384-322 av. J.-C.), chaque chose possède une « place naturelle » dans le monde hiérachiquement ordonné qu'il conçoit, si bien que l'espace induit un « mouvement naturel » visant à ramener l'objet à cette place (seul un mouvement « violent » peut

(1) Le préfixe grec « piézo » signifie « presser » ou « serrer ». Le terme « piézoélectricité » sera introduit en 1881 par le physicien allemand Wilhelm Gottlieb Hankel (1814-1899).

(2) Le physicien anglais découvre également en 1840 le phénomène de saturation magnétique.

chasser l'objet de sa position d'équilibre). Certes, contrairement à l'approche scientifique moderne, ces idées ne sauraient être découplées de la pensée métaphysique qui les sous-tend. Cependant, le rôle fondamental qu'Aristote confie à l'espace n'est pas sans rappeler le point de vue qu'adoptera plus tard la relativité générale. Cette démarche de compréhension « globale » des phénomènes résulte d'une longue tradition à laquelle les philosophes de l'école ionienne (dont Thalès) ont largement contribué, à travers la quête d'une « matière fondamentale » expliquant la nature du monde (et de la vie). Développant la thèse selon laquelle cette matière correspond en fait à quatre « éléments », Empédocle introduit dès le Ve siècle le concept de *force* (attractive ou répulsive) en tant que cause du mouvement. Pour ce dernier, l'essence des forces électriques et magnétiques tient précisément à la fraction infime de substance que libèrent les corps en interaction et aux *actions de contact* qui en résultent. On retrouvera cette notion d'*effluve* chez Gilbert deux mille ans plus tard. Soulignons que la vision d'Aristote est incompatible avec l'hypothèse d'un espace vide tel que l'espace de la géométrie euclidienne, qualitativement non-différencié et non hiérarchisé. Pour lui, la géométrie est indissociable de la matière. Aussi, la notion d'*action à distance* représente-t-elle un artifice inconcevable dans la physique aristotélicienne[(1)].

Conformément à ce point de vue, Descartes (1596-1650) élabore la première théorie générale des *milieux continus*. Il postule que toutes les actions physiques résultent de chocs ou de pressions exercés entre des corpuscules incompressibles qui emplissent l'espace. Si cette théorie n'est pas à proprement parler une théorie des champs, en ce sens que les propriétés de l'espace ne sauraient être distinguées de celles de la « matière » qu'il abrite, elle constitue le point de départ des travaux de Leonhard Euler (1707-1783) et de Daniel Bernoulli (1700-1782) qui établiront, un siècle plus tard la théorie mathématique des milieux déformables, fluides ou solides élastiques.

C'est alors que Newton introduit sa théorie de la gravitation, s'affranchissant alors de tout espace intermédiaire ou éther présupposé visant à « supporter » l'interaction qui s'exerce entre les masses. Telle que sa théorie est présentée en 1687, la gravitation est une interaction *à distance*, s'établissant de manière *instantanée*, et susceptible de s'exercer entre des corps éventuellement placés dans le vide. Cette théorie apparaît dès lors comme l'antithèse d'une théorie des champs. Un espace caractérisé par des propriétés physiques ne peut être « vide » stricto sensu. En outre, si l'interaction entre deux objets éloignés s'explique par la modification des propriétés locales du champ qui leur est associé, le temps d'établissement de ces propriétés est nécessairement non nul, ce qui exclut l'idée d'une action à distance instantanée. Pourtant, bien que longtemps réfuté par l'esprit cartésien, ce concept constituera la clef du développement rapide que vont subir conjointement l'électricité et le magnétisme. Ainsi, les

(1) De même, cette notion était incompatible avec le point de vue « atomique » développé parallèlement à la thèse d'Empédocle, conformément aux idées de Leucippe, Démocrite et Epicure. Ce point de vue sera finalement repoussé par Platon, puis Aristote, au profit de la théorie des « éléments ». Aristote rajoutera un cinquième élément, l'*éther*.

travaux de Cavendish et de Coulomb permettent d'étendre à ces deux domaines la conception newtonienne des forces centrales, attractives ou répulsives. Grâce à la notion de « masse magnétique », qui joue le rôle de la charge électrique en magnétisme, les lois quantitatives exprimant les forces électriques et magnétiques se formulent de manière analogue pour l'électricité et le magnétisme(1). Balayant définitivement les « effluves » de Gilbert, la loi en raison inverse du carré de la distance semble régir l'univers. Certes, d'un point de vue cartésien, la nature des forces s'exerçant à distance n'en est pas pour autant « expliquée », mais il est désormais possible d'en déterminer quantitativement les effets, sur la base d'une formulation commune à la mécanique, à l'électricité et au magnétisme.

Les processus d'interaction à distance s'exprimant selon une loi unique, il paraît légitime de chercher à intégrer les phénomènes physiques correspondants au sein d'un schéma de compréhension unifiée. Ainsi, après les premiers liens établis par Ørsted entre électricité et magnétisme, Ampère montre l'équivalence entre un barreau aimanté et un solénoïde parcouru par un courant. Dès 1821, il émet l'hypothèse que les molécules des corps sont le siège de « courants particulaires » que l'aimantation peut orienter. Précurseur de la théorie électronique de la matière, il suggère ainsi les liens intimes qui unissent électricité et magnétisme au coeur même de la matière. En revanche, si l'expression de la force magnétique donnée initialement par Biot et Savart varie bien en raison inverse du carré de la distance, la loi établie par Ampère pour la force élémentaire(2) montre que les actions d'origine magnétique s'exercent dans un plan perpendiculaire à celui qui contient la ligne de courant et le champ magnétique. Ainsi exprimées, les forces magnétiques se distinguent sensiblement des forces centrales gravitationnelles, comme le laissaient d'ailleurs apparaître les premières observations d'Ørsted. Le schéma newtonien universel n'est donc plus totalement satisfaisant.

Résolument abordées en termes d'électro-magnétisme, les investigations de Michael Faraday apportent peu à peu la réponse attendue. C'est avec ce physicien autodidacte que naît véritablement le concept de champ. S'il n'en conçoit pas la formulation mathématique, il en définit la nature physique profonde. Pour lui, l'interaction électromagnétique diffère fondamentalement de la gravitation. Contrairement à l'électricité et au magnétisme, il semble tout d'abord impossible d'opposer aux forces de gravitation un « bouclier » qui annihilerait leur effet. D'autre part, aucune preuve n'est faite que les actions gravitationnelles nécessitent un certain temps de propagation pour s'établir à distance. Ainsi, Faraday est-il partisan de l'idée selon

(1) Coulomb développe sa théorie dans la série des sept mémoires qu'il publit entre 1785 et 1791.

(2) Elle fut baptisée « force de Laplace », en hommage à celui qui suivit attentivement les travaux de Biot et d'Ampère en y apportant ses critiques. Si ses recherches se rapportent surtout à la mécanique céleste et au calcul des probabilités, Pierre-Simon de Laplace favorisera le brassage des idées et l'effervescence scientifique qui caractérisent le début du XIXe siècle. Entre 1805 et 1813, il réunit ainsi dans sa propriété d'Arcueil de jeunes savants parmi lesquels Claude Berthollet, Jean Antoine Chaptal, Jean-Baptiste Biot, François Arago, Denis Poisson, Louis Joseph Gay-Lussac.

laquelle la « matière » est non seulement constituée d'atomes ponctuels mais également de forces présentes dans l'espace. C'est dans ce contexte qu'il considère les *lignes de force* des champs électriques et magnétiques comme une modification tout à fait concrète de l'espace « vide » situé entre les corps en interaction. Les actions mécaniques globales résultent de la sommation des efforts locaux que constituent les *contraintes électromagnétiques* définies par les lignes de force : des contraintes de tension s'exercent le long de ces lignes tandis que des efforts de pression se développent selon des directions normales.

Cherchant initialement à établir une représentation mathématique des lignes de force introduites par Faraday son maître, James Clerk Maxwell (1831-1879) élaborera finalement la théorie du champ qui fait aujourd'hui référence. Le physicien écossais introduit en 1862 le concept de « courant de déplacement » apparaissant dans les diélectriques soumis à un champ électrique variable. De même que la variation d'un champ magnétique provoque l'apparition d'un champ électrique (phénomène d'induction), Maxwell doit admettre, symétriquement, qu'un champ magnétique est créé par la variation d'un champ électrique [**22**]. Condensant les lois précédemment établies avec ces nouvelles données, les équations aux dérivées partielles qui célèbrent son nom fondent l'électromagnétisme moderne, au travers d'un modèle aussi concis que général. Auteur de la théorie électronique de la matière, c'est le physicien néerlandais Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) qui parachèvera la théorie de Maxwell en y introduisant la discontinuïté des charges électriques [**23**]. Ayant pour second maître Lord Kelvin, alors Sir William Thomson (1824-1907), il n'est pas étonnant que l'énergie du champ ait très tôt revêtu pour Maxwell une importance capitale. L'énergie est localisable dans l'espace, sans qu'elle ne soit nécessairement associée à la matière. Preuve en est faite quelques années plus tard lorsque l'existence des ondes électromagnétiques prévues par la théorie de Maxwell sera expérimentalement vérifiée. Ces ondes ont même nature et même vitesse de propagation que celles de la lumière ; l'énergie est bien présente dans le champ entre la source et le récepteur entre le moment de l'émission et celui de la réception. Certes un éther est-il encore nécessaire pour supporter la propagation des ondes électromagnétiques à la fin du XIXe. L'électromagnétisme s'en trouve singularisé vis-à-vis des autres domaines de la physique. Toutefois, bien avant l'avènement de la théorie de la relativité, sa nature est certainement déjà très différente de celle de la matière newtonienne.

Réfutant définitivement l'idée d'un milieu servant de référence pour les déplacements de matière et d'énergie, la relativité d'Einstein, dont la première pierre est posée en 1905 avec la *relativité restreinte*, vise à traiter sur un même plan l'ensemble les lois de la nature [**1**]. Les phénomènes physiques, qu'ils soient de nature mécanique, électromagnétique ou autres, se déroulent de manière identique dans tout référentiel galiléen, et le seul étalon absolu est la vitesse de propagation d'un rayonnement électromagnétique, indépendamment du mouvement de sa source. Dans l'espace quadrimensionnel élaboré par Hermann Minkowski (1864-1909), temps et espace sont désormais indissociables [**24**]. Soulignons que la relativité confère à la théorie des

champs toute sa substance. Il est entendu désormais que toute relation de cause à effet ne peut s'établir avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. Matière et énergie étant équivalentes, les concepts de la mécanique et de l'électricité n'en sont que plus proches. En outre, avec la *relativité générale* (1915), la courbure même de l'espace est déterminée par les potentiels gravitationnels, de sorte qu'espace et champ semblent ne plus faire qu'un. Notons cependant que les tentatives de « géométrisation » du champ au sens de l'électrodynamique n'ont pu trouver à ce jour de justification théorique satisfaisante.

Très différent est le point de vue adopté par la *théorie des quanta* (1926) qui fixe un rapport constant entre l'énergie d'une particule et la fréquence de l'onde qui lui est intimement associée. Le rayonnement électromagnétique est alors représenté par l'émission de particules quantifiées, les *photons*. Lorsqu'elle change d'état énergétique, une particule chargée émet ou absorbe des photons. De même, l'annihilation d'une particule chargée (par exemple un électron) par une particule de charge opposée (dans ce cas, un positron) s'accompagne d'une émission photonique. Le processus est réversible si bien qu'il devient possible de créer des paires de particules à partir de photons. Le champ électromagnétique, au sens de Maxwell, peut donc être interprété comme la manifestation des particules créées à partir de l'énergie qu'il renferme. Quant à l'interaction entre particules chargées immobiles, elle procède, selon cette vision, d'un échange *virtuel* de particules du champ : un photon est brièvement émis par une charge avant d'être réabsorbé par cette même charge ou par une autre. Peut-être faut-il voir là une justification moderne des « effluves » si chères aux pionniers antiques de l'électrodynamique ?

Rappelons enfin que la compréhension actuelle des forces de l'univers repose sur la mise en jeu de quatre interactions fondamentales[(1)] dont les principales propriétés sont résumées dans le tableau 1.1.

Tableau 1.1 Les quatre interactions fondamentales

INTERACTION	GRAVITATIONNELLE	ÉLECTROMAGNETIQUE	FORTE	FAIBLE
domaine concerné	pesanteur	quasiment tous les phénomènes de la vie courante	cohésion des noyaux atomiques	radioactivité bêta
particule « messagère »	graviton G	photon γ	gluons g	bosons W^+, W^-, Z^0
masse du messager	0	0	2×10^{-28} Kg	$2,2 \times 10^{-25}$ Kg
forme du potentiel	$\propto \frac{1}{r}$	$\propto \frac{1}{r}$	$\propto \frac{e^{-r/r_0}}{r}$	$\propto \frac{e^{-r/r_0}}{r}$
portée	∞	∞	10^{-15} m	10^{-18} m
intensité relative	10^{-36}	10^{-2}	1	10^{-7}

(1) Conformément à la démarche entreprise dès l'Antiquité, l'intégration de ces quatre types d'interactions au sein d'un schéma théorique commun représente un défi scientifique majeur pour la recherche fondamentale (théorie de la « Grande Unification » ou théorie « du Tout » incluant la gravitation).

Parmi ces quatre types de forces, l'*interaction électromagnétique* joue un rôle majeur dans la plupart des phénomènes de notre quotidien (depuis la lumière et les ondes électromagnétiques jusqu'à la cohésion de la matière, à l'échelle des atomes, des molécules, des couteaux et des fourchettes...). Donnant lieu à des forces d'intensité relativement élevée, cette interaction intervient tout naturellement au coeur des processus de transformation de l'énergie. Elle constitue l'essence même des procédés permettant de convertir l'énergie d'une forme mécanique à une forme électromagnétique (et réciproquement). Aussi, les progrès scientifiques accomplis dans le domaine de l'électrodynamique sont indissociables de l'aventure technologique qui conduit à la mise au point des premières *machines* électromécaniques opérationnelles.

1.2.3 L'avènement des premières machines électromécaniques

C'est certainement avec les expériences d'Otto von Guericke que débute véritablement l'histoire des convertisseurs électromécaniques d'énergie, et plus particulièrement celle des *générateurs électrostatiques*. Ainsi, la boule de soufre qu'il frotte de sa main pour en extraire les charges cède bientôt la place à un globe de verre électrisé à l'aide d'une étoffe de laine. Tel est le principe du générateur présenté en 1706 par Francis Hauksbee (1666-1713). La configuration discoïde s'imposera dès 1766 avec la machine de l'opticien anglais Jesse Ramsden (1735-1800). Un disque de verre, entraîné en rotation à l'aide d'une manivelle, est ici pressé entre quatre coussins de cuir remplis de crin. Les charges positives crées sur le disque provoquent par influence l'électrisation de deux conducteurs horizontaux. Très populaire à la fin du XVIIIe siècle, cette structure constitue l'ancêtre de la célèbre machine de Wimshurt (1880) constituée de deux disques de verres tournants en sens inverse et munis de secteurs métalliques pour collecter les charges.

L'idée de créer le mouvement à partir de l'électricité prend corps immédiatement après les premiers travaux d'Ørsted et d'Ampère. Conformément aux théories avancées par ce dernier, le magnétisme de la matière serait associé à l'existence de boucles de courants internes(1). Cette thèse laisse à penser à des savants tels que William Hyde Wollaston (1766-1828) et Sir Humphrey Davy (1778-1829) qu'il doit être possible, si la vision d'Ampère est correcte, d'en démontrer les effets « rotationnels ». Dans leur laboratoire de la Royal Institution de Londres, ils cherchent alors à mettre en évidence l'existence d'un couple dynamique s'exerçant sur un courant mis en présence d'un corps aimanté, mais échouent dans leurs tentatives. Pourtant, au cours des derniers mois de l'année 1821, l'ancien assistant de Davy, qui n'est autre que Michael Faraday, démontrera avec succès l'effet des *rotations électromagnétiques*. Ouvrant ainsi la voie aux premiers principes de *moteurs électriques*, il montre, à l'aide d'un fil suspendu au dessus d'un cylindre aimanté dont l'extrémité libre plonge dans une cuve de mercure, que la circulation d'un courant engendre la rotation continue du fil autour

(1) Ayant échoué dans la mise en évidence de courants volumiques, Augustin Fresnel (1788-1827) suggère à Ampère l'existence de courants « moléculaires ».

de l'aimant, comme l'illustre la figure 1.3. Ses expérimentations portent réciproquement sur la rotation d'un aimant autour d'un courant. D'autres savants travailleront sur la question des rotations électromagnétiques, tel Peter Barlow (1776-1862) qui construit en 1822 la célèbre roue qui porte son nom : placées entre les pôles d'un aimant en fer à cheval, une roue de cuivre en forme d'étoile est parcourue par un courant radial établi entre l'axe de rotation et les pointes de l'étoile via un contact à mercure ; le courant axial et le champ radial donnent naissance à un effort tangentiel qui entraîne la roue en rotation et entretient le phénomène. Le même résultat est obtenu en 1823 à l'aide d'une roue discoïdale par l'ingénieur anglais William Sturgeon (1783-1850). Ce dernier inventera l'électroaimant deux ans plus tard.

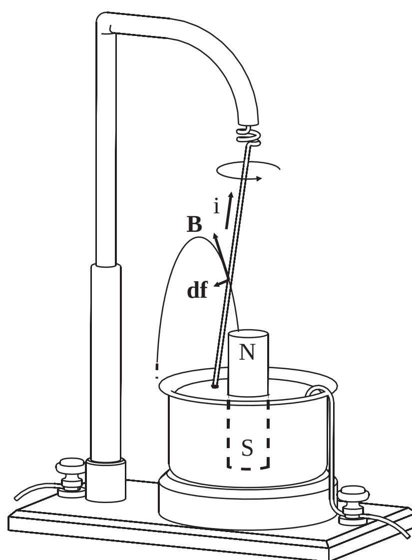


Figure 1.3 Le démonstrateur rotatif de Faraday

Tributaires de l'énergie d'une pile, et de performances électromécaniques encore modestes, ces dispositifs sont encore peu crédibles en tant que moteurs d'entraînement. C'est la découverte de l'induction qui marquera véritablement le début de l'essor des machines à effets électromagnétiques. Ainsi, renversant les principes utilisés dans ses études sur les rotations électromagnétiques, Faraday invente en 1831 le premier générateur *magnéto-électrique*. Fondé sur une interaction de nature *homopolaire* (le conducteur balaye un champ de polarité invariable), le principe de ce générateur *à courant continu* est originellement testé à l'aide d'un disque de cuivre de 300 mm de diamètre et de 5 mm d'épaisseur environ, dont un segment est engagé entre les pôles d'un aimant permanent à plusieurs lames [**26**]. Le courant induit est collecté au moyen de deux lames conductrices frottant l'une sur l'axe de rotation du disque et l'autre sur sa périphérie. À partir de cette invention majeure, de nombreuses structures

de machines fondées sur le principe de l'induction seront imaginées. En France, dès 1832, Antoine-Hippolyte Pixii (1808-1835) invente, sur les indications d'Ampère, un générateur magnéto-électrique destiné à remplacer les batteries de piles. Inaugurant le concept de machine *hétéropolaire*, ce générateur repose sur la création de *courants alternatifs* induits au sein d'une paire de bobines tournant en regard des pôles d'un aimant en fer à cheval constituant l'*inducteur*. Afin d'obtenir le courant continu recherché, Pixii, à l'instigation d'Ampère, équipe sa machine d'un jeu de contacts tournants segmentés afin de *redresser* les courants alternatifs. Ainsi apparaît le principe de la *commutation* électromécanique.

Au cours des trois décennies qui font suite à la découverte de Faraday, le monde des convertisseurs mécano-électriques suscite une activité inventive très intense. Des configurations de machines très variées, tournantes pour la plupart, seront imaginées et mises au point à travers l'Europe et les États-Unis. S'il serait ici déraisonnable d'en entreprendre l'analyse exhaustive, il faut néanmoins avoir conscience de la diversité des solutions technologiques considérées avant que ne s'imposent les structures à entrefer radial ou axial que nous connaissons aujourd'hui [**27**]. Ainsi par exemple, la machine schématisée sur la figure 1.4, due à l'américain Charles Grafton Page (1812-1868), dérive directement des concepts couramment pratiqués dans le domaine du moteur à vapeur : le piston à double effet laisse la place à un noyau plongeur à double solénoïde, tandis que le commutateur électromécanique, commandé par excentrique dans certaines versions, assure la fonction de distributeur.

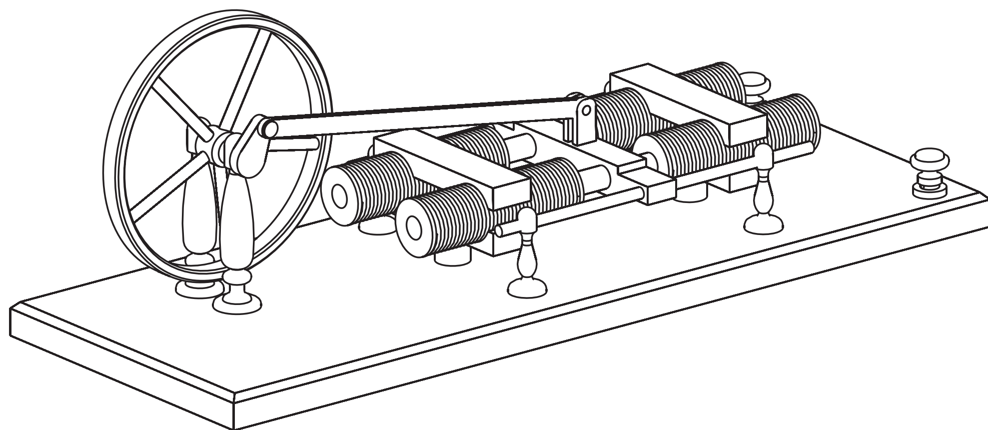


Figure 1.4 Moteur à pistons électromagnétiques de C. G. Page (1846)

Il faut également noter que, outre l'impulsion décisive que la science naissante des machines électromécaniques doit aux savants, physiciens ou chimistes, de nombreuses avancées technologiques résultent de l'inventivité d'habiles *appareilleurs* spécialisés jusqu'alors dans la fabrication d'instruments scientifiques. Tel est le cas

de E.M. Clarke à Londres ou encore du français Paul-Gustave Froment (1815-1865) qui, parallèlement à la réalisation d'instruments scientifiques dont le fameux pendule de Foucault, développera de nombreuses structures d'*électromoteurs*. Mentionnons également l'américain Daniel Davis, Jr. (1813-1887) dont l'activité fut étroitement associée à celle de scientifiques célèbres tels que Joseph Henri et qui mit au point, notamment pour le compte de Charles Grafton Page, de nombreux prototypes de machines électromagnétiques.

S'agissant des ruptures technologiques qui jalonnent le développement pré-industriel des machines électromécaniques, on retiendra parmi les plus marquantes l'armature *en anneau* introduite en 1864 par le physicien italien Antonio Pacinotti (1841-1912). Cherchant à réduire les fluctuations d'intensité des courants induits délivrés par les génératrices hétéropolaires, Pacinotti propose d'utiliser un électroaimant en forme de tore muni de dents entre lesquelles sont insérées les bobines élémentaires. Ces bobines sont reliées les unes aux autres en série pour former un circuit fermé. Les points de connexion de cet « électro-aimant transversal », tel qu'il le nomme, aboutissent à autant de touches métalliques isolées qui constituent l'élément tournant du commutateur, ou *collecteur*. Signalons qu'une forme très proche de cette invention[(1)] sera retrouvée tout à fait originalement par Zénobe-Théophile Gramme (1826-1901) quelques années plus tard. Débutant sa carrière en qualité d'ébéniste à la société « l'Alliance »[(2)], Gramme perfectionnera la machine à courant continu au point de fonder sa propre société en 1871 pour commercialiser une version particulièrement aboutie de générateurs à courants continus destinés aux laboratoires et à l'industrie.

Un autre progrès important, suggéré pour la première fois par Jacob Brett en 1848, consiste à tirer profit du courant développé par le bobinage d'induit pour renforcer le magnétisme des aimants permanents inducteurs, grâce à une bobine enroulée autour de ces derniers. Le principe de l'*auto-excitation* est largement développé par Ernst Werner von Siemens (1816-1892) pour donner lieu à la machine *dynamo-électrique*[(3)] qu'il décrit en 1867 devant l'Académie de Berlin. L'emploi de l'*inducteur bobiné* se généralise rapidement. Il faudra attendre les années 1970 avant que les progrès accomplis dans le domaine des aimants à base de terres rares ne redonnent un nouveau souffle aux machines et actionneurs excités par aimants permanents. S'agissant du bobinage d'induit, Werner von Siemens jouera également un rôle déterminant dans le perfectionnement des architectures utilisées. Il crée tout d'abord le bobinage *en*

(1) L'anneau de Gramme est dépourvu de dents et entièrement recouvert de fil conducteur.

(2) Spécialisée dans la construction d'appareils électriques, la société « l'Alliance » développera une machine magnéto-électrique qui, à partir de 1863, rendra de grands services pour l'éclairage des phares. Ce générateur dérive de la machine construite en 1849 par Florise Nollet, petit neveu de l'abbé Nollet.

(3) Par opposition aux machines « magnéto-électriques » dont le champ d'excitation résulte de l'action d'un aimant permanent, les machines « dynamo-électriques » produisent « elles-mêmes » le magnétisme nécessaire à leur excitation.

navette à enroulement longitudinal. On doit également à un de ses proches collaborateurs, Friedrich von Hefner-Alteneck (1845-1904), la structure d'armature *en tambour* actuellement employée dans la plupart des rotors de machines à courant continu. Quant à la machine multipolaire, munie d'un induit en anneau ou en tambour, elle fait son apparition à partir des années 1870.

Ainsi, la génératrice de Siemens, celle de Gramme ou encore celle que Thomas Alva Edison (1847-1931) commercialisera quelques années plus tard aux États-Unis, contribuent peu à peu à instaurer la machine électrique en tant qu'instrument incontournable du progrès industriel. Ce développement s'accélère sensiblement avec l'exploitation de la *réversibilité* des machines dynamo-électriques. L'ère de la transmission de la puissance électrique est née. On aime à rappeler que la réversibilité de la machine à courant continu fut mise en évidence accidentellement par Hyppolyte Fontaine (1833-1917) et Zénobe Gramme, à l'aide d'un montage associant deux machines similaires, l'une étant alimentée par l'autre. Ce montage fut ainsi présenté comme une innovation majeure lors de l'Exposition de Vienne en 1873. Pourtant, le fait que le fonctionnement de la dynamo est simplement l'inverse de celui du moteur semble connu de longue date. Daniel Davis y fait notamment référence, et de manière tout à fait explicite, dans son « manuel de magnétisme » publié à Boston dans les années 1840 [**27**].

La dernière grande étape du développement des convertisseurs électromécaniques à la fin du XIXe siècle correspond sans nul doute à l'entrée en scène des machines *à courants alternatifs*. Les réflexions menées en matière de transport de l'énergie électrique, dues notamment à Lucien Gaulard (1850-1888) au début des années 1880, laissent à penser que les courants alternatifs, exploités sous de hautes tensions, sont préférables aux courants continus pour transporter l'électricité sur de longues distances et la distribuer à ses utilisateurs potentiels. Face au développement de tels réseaux d'énergie, la possibilité d'adapter les niveaux de tensions à l'aide du *transformateur* que Gaulard met au point avec son collègue anglais John Gibbs constitue sans nul doute un sérieux avantage des courants alternatifs par rapport aux solutions à courants continus. Par ailleurs, le générateur magnéto-électrique polyphasé à courant alternatif, ou *alternateur*, constitue une machine relativement robuste déjà disponible à cette époque. Gramme en construira plusieurs variantes, diphasées ou triphasées, dès 1878. La figure 1.5 présente un modèle monophasé commercialisé par Siemens. En revanche, contrairement à la machine à courant continu, le générateur à courant alternatif ne saurait constituer un moteur convenable dans la mesure où il ne peut démarrer par lui-même. Une réponse au problème est cependant suggérée par l'américain Walter Bailey qui démontre en 1879 la possibilité d'entretenir la rotation d'un disque de cuivre plongé dans un *champ tournant*. Il exploite ainsi les effets électrodynamiques observés par Arago dès 1824 à l'aide d'un aimant se déplaçant devant un conducteur massif. En 1883, le yougoslave Nikola Tesla (1856-1943), alors employé de la Continental Edison en France, revendique la construction d'un premier démonstrateur de moteur *à induction*. Il émigre aux États-Unis en 1884 où ses premiers

succès portent sur l'amélioration de la machine d'Edison, alors farouche partisan du courant continu. Il revient néanmoins bien vite à ses idées premières et, apportant son concours à l'industriel Georges Westinghouse (1846-1914), il contribue de manière décisive au développement des systèmes de production, de transmission et de distribution de l'énergie électrique au moyen de courants alternatifs. C'est néanmoins à l'italien Galileo Ferraris (1847-1897) que l'on attribue généralement la construction du premier prototype de moteur à induction polyphasé. Parmi les différentes structures qu'il développe à partir de 1885, la plus simple est constituée d'un système de deux bobines d'axes perpendiculaires au centre desquelles tourne un cylindre de cuivre. Divers ingénieurs participeront activement au perfectionnement de ce type de machine, dont Michael von Dolivo-Dobrowolski (1862-1919) qui introduira notamment le concept de rotor *à cage d'écureuil* en 1889. Alliant simplicité, robustesse et performance, la machine à induction s'imposera peu à peu comme le vecteur privilégié de la *force motrice* dans les réseaux triphasés à courants alternatifs.



Figure 1.5 Modèle d'alternateur monophasé Siemens (1889) à bobines axiales et double entrefer (© INPT/ENSEEIHT/D. Harribey)

Concluons ces notes historiques en mentionnant les retombées de l'électrodynamique dans un secteur développé parallèlement à celui des machines, celui des *transducteurs*. C'est à nouveau Werner von Siemens qui décrit le premier appareil magnétoélectrique capable de transformer un signal électrique en mouvement. Ancêtre du moteur de haut-parleur « électrodynamique », le dispositif qu'il brevète en 1874 est constitué d'une bobine, soumise au champ d'un aimant, et mobile dans une direction axiale. Siemens n'exploite pas pour autant son appareil en tant que transducteur électroacoustique. L'idée de transmettre la parole à l'aide de signaux électriques avait pourtant été avancée dès 1865 par Alexander Graham Bell (1847-1922). C'est chose faite en 1876 lorsque les mots inoubliables de l'inventeur du téléphone - *Watson, come here ; I want you* - résonnent à l'écouteur de son assistant médusé.

Citons dans un autre domaine les travaux de Paul Langevin (1872-1946) avec qui naîtra la première application de la piézoélectricité. Maître de la physique théorique en France, mais aussi expérimentateur de talent, Langevin crée la technique de production et de réception des ultrasons en exploitant les propriétés piézoélectriques du quartz. Durant la première guerre mondiale, ces travaux apporteront une réponse prometteuse au problème de la détection des sous-marins ennemis. Les succès obtenus en 1916 marqueront ainsi le début du développement du SONAR (SOund NAvigation and Ranging), équipement dont les perfectionnements ultérieurs seront largement influencés par les travaux de Langevin.

Pourtant fondés sur un socle scientifique commun, les transducteurs et les machines électromécaniques font très tôt référence à deux domaines techniques bien distincts. Les années 1980 marqueront le retour d'une certaine synergie entre ces deux domaines, au travers notamment du développement des *piézomoteurs*. Ainsi, à l'aube du XXIe siècle, la question émergente des *matériaux électroactifs* confère à l'électrodynamique une dimension nouvelle, ouvrant la voie à un vaste champ d'investigation tant au plan scientifique que technologique.

1.3 ENJEUX MODERNES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

1.3.1 Un vecteur énergétique incontournable

Instrument décisif des progrès techniques et économiques accomplis au cours du XXe siècle, l'électricité représente en 2000 près de 20 % de l'énergie totale consommée dans le monde [**28**]. Comme l'illustre la figure 1.6, le développement de cette source d'énergie s'effectue de manière relativement rapide durant la deuxième moitié du XXe siècle : entre 1950 et 1980, la consommation mondiale d'électricité double environ tous les 10 ans. Certes, au-delà des données globales, il convient de souligner la répartition très inégale de la consommation énergétique entre pays riches et pays pauvres : les pays de l'OCDE et de l'ex-URSS, soit environ 1,4 milliards d'habitants, consomment à eux seuls les deux tiers des ressources disponibles.

Que l'électricité soit dite *primaire* (électricité d'origine nucléaire, géothermique, hydraulique ou éolienne) ou *secondaire* (lorsqu'elle est issue de la combustion des énergies fossiles ou de la biomasse), cette forme d'énergie s'impose d'autant plus dans l'économie moderne qu'elle jouit d'avantages incontournables tels que souplesse d'utilisation, disponibilité, respect des contraintes environnementales, etc. Ces avantages tiennent notamment à la *réversibilité* et à l'*efficacité énergétique* de la plupart des processus de conversion fondés sur l'utilisation de l'électricité. Ainsi, à titre d'exemple, l'efficacité énergétique[(1)] associée au transport par Train à Grande Vitesse

(1) Dans le cas des moyens de transport, l'efficacité énergétique peut être évaluée en déterminant la quantité d'énergie primaire nécessaire pour transporter des marchandises ou des passagers sur une distance donnée. À la fin des années 1990, cette efficacité est estimée, dans le cas du transport aérien civil, à environ 80 gramme équivalent pétrole par voyageur transporté et par kilomètre parcouru, alors qu'il suffit de 10 $\text{gep.voy}^{-1}.\text{km}^{-1}$ dans le cas du train à grande vitesse.

(TGV à propulsion électrique) est environ 8 fois plus élevée que celle qui caractérise le transport aérien. Quant au rendement moyen des moteurs thermiques actuels, il ne dépasse pas 30 %, alors que, dès le début du XXe siècle, celui des machines électriques était déjà supérieur à 80 %.

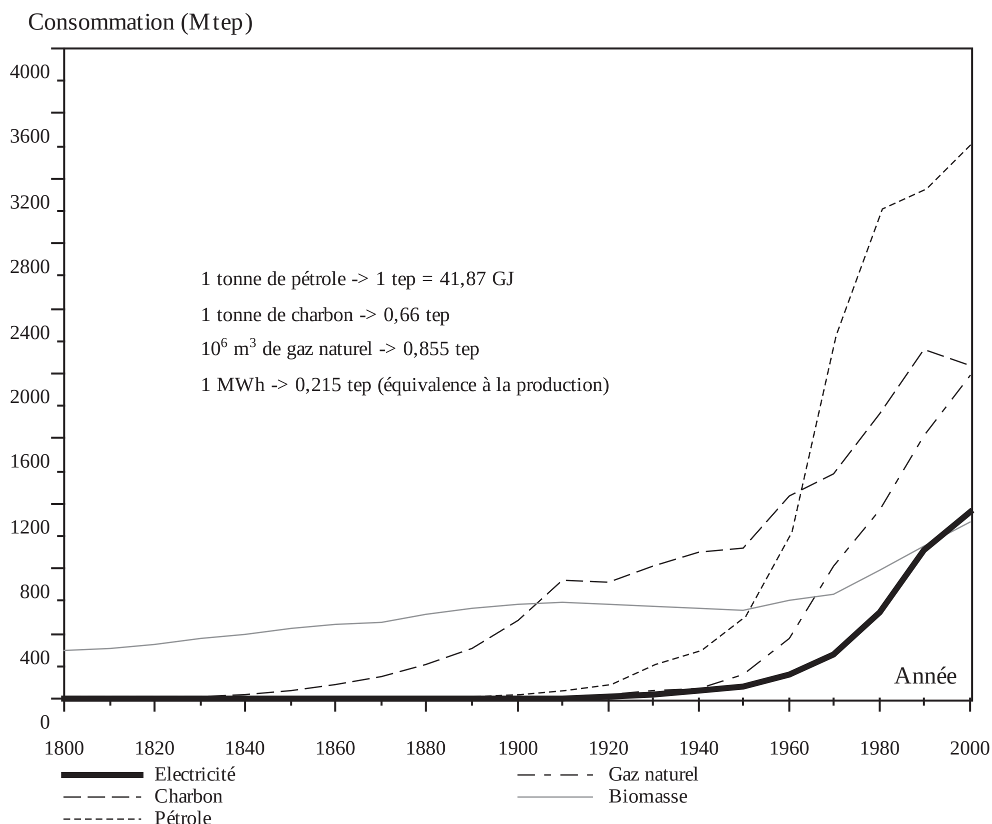


Figure 1.6 Évolution de la consommation énergétique mondiale entre 1800 et 2000 (en millions de tonnes équivalent pétrole)

À l'exception de procédés de conversion « directe » tel que les générateurs photovoltaïques[(1)], la production d'électricité repose presque exclusivement sur l'exploitation de machines électriques tournantes. Essentiellement constitués d'alternateurs dont les puissances unitaires peuvent atteindre 2 000 MVA, ces générateurs utilisent les lois de l'induction électromagnétique pour transformer le « mouvement » en électricité. Environ 20 % de l'électricité mondiale est ainsi produite à l'aide de machines

(1) En 2001, la quantité d'électricité produite dans les pays de l'OCDE s'élève environ à 10 000 TWh. Moins de 600 GWh correspondent à la part d'origine photovoltaïque.

lentes utilisant l'écoulement de fluides « naturels » (centrales hydro-électriques, éoliennes). Quant à la plus grande partie de la puissance installée, elle résulte de l'exploitation de turbo-alternateurs tirant leur énergie d'un fluide « intermédiaire » accéléré sous l'effet de processus thermodynamiques (centrales nucléaires, centrales thermiques).

Si la quasi-totalité de l'énergie électrique produite résulte ainsi du mouvement, une fraction conséquente de l'électricité consommée retourne au mouvement en vue de satisfaire à des besoins variés. Ainsi, près de 30 % de l'électricité utilisée en 2000 dans l'Union européenne correspond à l'alimentation des systèmes mûs à l'aide de moteurs électriques. En France, ces moteurs absorbent environ 70 % de l'électricité consommée dans le secteur industriel. Ces besoins se répartissent entre la motorisation des compresseurs (30 %), des pompes (20 %), des ventilateurs (13 %) et l'actionnement de systèmes électromécaniques divers. Outre l'industrie, l'électromécanique joue également un rôle non-négligeable dans le secteur des transports ainsi que dans celui du résidentiel et du tertiaire. Face à ce dernier domaine qui représente, pour la France, près de 100 millions de tonnes équivalent pétrole, les moteurs et mécanismes électromécaniques (appareils ménagers, ascenceurs, systèmes domotiques) sont ainsi responsables de 10 % de l'énergie consommée dans ce secteur à la fin des années 2000.

1.3.2 La montée en puissance des réseaux électriques embarqués

Outre la poussée croissante de l'électromécanique à l'échelle des réseaux électriques terrestres, la généralisation de l'électricité en tant que vecteur d'énergie principal des *systèmes énergétiques autonomes* place l'électrodynamique au coeur de nouvelles révolutions technologiques. Amorcée durant le dernier quart du XXe siècle, cette tendance au « tout électrique » s'exprime tout naturellement dans le domaine des engins de transport. Qu'ils soient utilisés pour la propulsion, le pilotage ou la mise en oeuvre de fonctions auxiliaires, les convertisseurs électromécaniques (moteurs, actionneurs, générateurs) complètent avantageusement, supplantent dans certains cas, les moyens mécaniques ou hydrauliques classiquement utilisés. C'est ainsi que se développent les concepts de *véhicule électrique, navire tout électrique, avion plus électrique* donnant lieu à des progrès spectaculaires, tant en termes de performances (optimisation énergétique) que de fonctionnalités (souplesse de pilotage[(1)]). De par sa modularité et sa relative simplicité d'intégration, la solution électromécanique favorise en outre la réduction des coûts de fabrication et d'exploitation. Un exemple particulièrement révélateur de cette tendance à l'électrification systématique concerne les systèmes de commande dits « x-by-wire ». Désormais incontournables en aéronautique, ces

(1) Dans le domaine de la propulsion des grands navires par exemple, l'utilisation de moteurs électriques implantés au sein de nacelles orientables extérieures à la coque (propulseurs de type POD), permet d'envisager des manœuvres jusqu'alors inaccessibles aux bâtiments à propulsion classique par lignes d'arbre.

architectures pénètrent peu à peu le monde de l'automobile(1). L'électromécanique s'impose ainsi progressivement au niveau le plus intime des chaînes de pilotage des navires, aéronefs et véhicules terrestres.

Pour évaluer concrètement l'impact de l'électromécanique au sein de ces réseaux embarqués, on peut tout d'abord observer l'évolution des puissances électriques installées à bord des automobiles. Le tableau 1.2 précise à cette fin l'évolution des caractéristiques principales des générateurs électriques utilisés. Le choix du réseau à courant continu, incluant un organe de stockage électrochimique à basse tension, a fait logiquement de la machine dynamo-électrique régulée en tension(2) la solution de référence jusque dans les années 1960. Apparaissent alors les premiers alternateurs automobiles dont la généralisation permettra d'accroître sensiblement les performances et la fiabilité du réseau de bord des véhicules(3). L'augmentation des puissances consommées et le recours quasi-systématique aux semi-conducteurs pour contrôler les systèmes embarqués imposent aujourd'hui une nouvelle augmentation de la tension du réseau (de 12 V à 42 V). Soulignons là encore qu'une grande part de l'énergie électrique disponible est utilisée par des *actionneurs électromécaniques* dont le nombre croît considérablement à partir des années 1980(4). Dédiés tant à l'amélioration du confort des passagers qu'aux fonctions d'assistance ou de contrôle du véhicule, on considère que ces actionneurs et leur faisceau de cablage représentent aujourd'hui une masse embarquée de l'ordre de 100 kg.

Tableau 1.2 Évolution des générateurs électriques utilisés dans les véhicules automobiles particuliers

Année	Type de générateur	Tension / Courant	Puissance massique
1920	dynamo	6 V / 12 A	6 $W.kg^{-1}$
1940		12 V / 12 A	23 $W.kg^{-1}$
1960		12 V / 30 A	52 $W.kg^{-1}$
1970	alternateur	13,5 V / 35 A	114 $W.kg^{-1}$
1990		13,5 V / 70 A	210 $W.kg^{-1}$
2010		42 V / 50 A	300 $W.kg^{-1}$

(1) Bien plus qu'une simple évolution technologique, le relayage des ordres de commande par voie purement électrique suppose la suppression des liens mécaniques entre l'interface homme-machine et les organes de puissance. Face au domaine de l'automobile « grand public », cette stratégie constitue une rupture majeure dans les schémas de pensée couramment admis tant par l'utilisateur que par le concepteur. On mesure aisément ses implications en termes de sûreté et de sécurité de fonctionnement.

(2) La génératrice à courant continu contrôlée par régulateur de tension est introduite par Léon Cibié en 1913.

(3) En 1965, Ducellier commercialise le premier alternateur du marché automobile français. Ce générateur monophasé de 390 W est monté pour la première fois sur la Citroën Ami 6. Deux ans plus tard, un alternateur triphasé à pont de diodes incorporé et régulateur séparé équipera la Citroën DS 21.

(4) À titre d'exemple, une Citroën DS 21 « Pallas » de 1968 comporte moins de 10 actionneurs (moteurs à collecteurs pour la plupart), tandis qu'une Citroën XM « Exclusive » des années 1990 en compte plus de 50 (relais non compris), dont 30 sont affectés à des fonctions de contrôle du moteur thermique.

Depuis l'apparition de l'éclairage électrique des avions quelques mois avant le début de la première guerre mondiale, la puissance caractérisant les réseaux de bords des aéronefs n'a cessé d'augmenter. L'accroissement de la taille des avions, la multiplication des équipements électroniques embarqués (des instruments de navigation aux systèmes d'armes des avions militaires), l'amélioration du confort des passagers sont autant de facteurs qui justifient l'augmentation régulière de la puissance installée, comme l'illustre le tableau 1.3.

Tableau 1.3 Évolution des puissances électriques installées à bord des avions de transport civil de la gamme Airbus

Type d'Appareil	Année (Premier vol)	Nombre de passagers	Puissance installée	Puissance massique des générateurs
Super Caravelle	1965	100	2×40 kVA	670 W.kg^{-1}
A300	1972	250	2×90 kVA	1 500 W.kg^{-1}
A320	1987	150	2×90 kVA	1 500 W.kg^{-1}
A330 - 300	1992	295	2×115 kVA	1 540 W.kg^{-1}
A340 - 600	2001	380	4×90 kVA	1 500 W.kg^{-1}
A380	2005	555	4×150 kVA	2 310 W.kg^{-1}



Figure 1.7 Actionneur hydraulique classique (à gauche) et actionneur électrohydrostatique - EHA (effort statique : 15 700 daN, masse : 30 Kg) destinés au braquage d'un aileron d'Airbus A340 (© Airbus - Département Commandes de Vol)

Soulignons que la démarche d'électrification progressive des commandes de vol, inaugurée dans le domaine civil sur le Concorde et largement développée depuis, a trouvé un certain aboutissement avec le développement des actionneurs de gouverne à puissance électrique[(1)]. Comme l'illustre la figure 1.7, l'intégration fonctionnelle qui caractérise ce type de technologie (la source et la réserve de pression, de même que l'électronique de pilotage, sont intégrées dans le volume offert) permet d'accéder à des dispositifs relativement performants à l'échelle du système global dans lequel ils s'insèrent.

1.3.3 Les nouveaux défis de l'électrodynamique appliquée

Si les progrès de l'électromécanique apparaissent de nos jours comme relativement discrets, à l'abri des battages médiatiques qui rythment la vie de sujets plus spectaculaires, ses retombées n'en sont pas moins stratégiques, tant au plan industriel que par ses implications croissantes dans notre univers quotidien. En outre, de nouveaux défis s'annoncent aujourd'hui qui justifient pleinement l'effort de recherche scientifique et technologique déployé dans le domaine de l'électrodynamique appliquée. Sans chercher ici à en développer une prospective exhaustive, on peut néanmoins cerner ses principaux enjeux au travers de quelques exemples.

S'agissant tout d'abord des aspects énergétiques, l'implication des convertisseurs électromécaniques au coeur des systèmes de production et de transformation de l'électricité laisse entrevoir un gisement d'*économies d'énergie* appréciable, et cela malgré les niveaux déjà très élevés de rendement de conversion qui caractérisent ces dispositifs. Des études ont ainsi montré que 30 à 50 % de l'électricité consommée par les moteurs industriels pouvaient être économisés grâce à un pilotage et un suivi optimisés, ainsi que par la mise en oeuvre de technologies plus performantes. Dans le cas du transport ferroviaire à grande vitesse par exemple, l'usage de moteurs de traction à aimants permanents à commutation électronique, dont le rendement (de l'ordre de 97 %) est supérieur de 2 à 3 % à celui des moteurs équipant les versions actuelles du TGV[(2)], correspondrait à une économie se chiffrant en centaines de kWh à l'échelle de la rame sur un trajet de référence. De plus, dans la gamme de taille concernée, l'économie de masse au niveau des moteurs est de l'ordre de 25 %[(3)],

---

(1) Dans le cas des commandes de vol électriques classiques, les gouvernes sont actionnées à l'aide d'un vérin hydraulique piloté par une servo-valve à commande électrique recevant ces ordres d'un calculateur. Les technologies d'actionneurs à puissance électrique de type électrohydrostatiques (EHA) ou électromécaniques (EMA) permettent d'envisager de nouvelles architectures de commande de vol au sein desquelles les circuits hydrauliques de puissance laissent avantageusement la place à des réseaux d'alimentation électrique. Notons que ce remplacement ne concerne pas nécessairement l'ensemble des circuits hydrauliques mis en jeu (généralement au nombre de 3 sur un avion de transport civil), ce qui permet alors de tirer profit d'une architecture « hybride » (cas de la stratégie adoptée sur l'Airbus A380).

(2) Équipée de moteurs synchrones à inducteur bobiné (« TGV-A » ou « TGV-Réseau ») ou de moteurs à induction (« TGV-Transmanche »), une rame de TGV comporte de 8 à 12 moteurs dont la puissance unitaire est de l'ordre de 1 MW (à 4 000 tr.min^{-1}).

(3) Un moteur de traction à aimant permanent développant une puissance de 700 kW à 4 500 tr.min^{-1} pèse environ 700 kg.

ce qui permet d'envisager des rames dite « automotrices à grande vitesse » (AGV) au sein desquelles la motorisation n'est plus concentrée au niveau des motrices mais répartie le long du train.

Une autre voie d'amélioration des convertisseurs électromécaniques repose sur l'augmentation des vitesses de rotation, en vue notamment de gains substantiels en termes de puissances spécifiques et d'encombrement. Soulignons que le développement des moteurs et générateurs à *grande vitesse* requiert cependant la levée d'un certain nombre de verrous. D'un point de vue scientifique tout d'abord, la maîtrise des puissances dissipées nécessite d'approfondir l'analyse des phénomènes thermo-électro-magnétiques qui déterminent le comportement des matériaux ferromagnétiques sollicités à *haute fréquence*. Au plan technologique, il s'agit de développer et mettre en oeuvre de nouveaux matériaux (tels que les matériaux « composites ») au sein de structures de conversion satisfaisant conjointement à différents types de contraintes et de critères, de nature mécanique, électromagnétique, thermique, etc. S'agissant des aspects méthodologiques liés à la définition et au dimensionnement rationnels des structures envisagées, le problème se formule à l'évidence en termes d'*optimisation.*

Au-delà de la course aux performances qui concerne pour une grande part l'amélioration de structures et de concepts préexistants, l'émergence de nouveaux besoins et de nouvelles fonctionnalités constitue dans le même temps une puissante motivation pour l'*innovation technologique*.

Parmi les nombreux secteurs concernés, le domaine des transports apparaît comme relativement porteur pour les nouvelles technologies de l'électrodynamique. Dans le domaine des transports terrestres guidés par exemple, le franchissement des limites imposées par le contact « roue-rail » en termes de vitesse et d'accélération passe par la mise au point de systèmes électromagnétiques combinant les fonctions de propulsion, de sustentation et de guidage du véhicule. Tel est le cas du prototype de train « MAGLEV Transrapid » à aimants supraconducteurs, capable d'une vitesse maximale de 550 km.h^{-1} (record de 1999) et d'une accélération plus de trois fois supérieure à celle d'un TGV.

Le secteur médical constitue également un champ d'investigation particulièrement prometteur. L'innovation est susceptible de s'y exercer à différentes échelles. La mise au point de *microactionneurs* permet tout d'abord d'envisager l'implantation de microsystèmes autonomes dans le corps humain capables, par exemple, de libérer une substance active lorsque l'état du patient le réclame. En matière de microchirurgie robotisée, les besoins se définissent en termes d'*actionneurs à plusieurs degrés de liberté* , pour contrôler avec précision des mouvements de plus en plus complexes à l'aide d'une chaîne cinématique la plus compacte possible. Il s'agit également de disposer d'*interfaces haptiques à retour d'effort* permettant au praticien de ressentir les conséquences de son geste via l'organe de commande qu'il manipule. Un thème majeur concerne par ailleurs le développement de prothèses ou d'orthèses électriquement activées. Dans le domaine particulier de l'assistance circulatoire, un des

principaux défis correspond ainsi à la mise au point d'implants électromécaniques capables de suppléer totalement ou en partie les fonctions natives déficientes (valves, ventricules). Comme en témoigne la figure 1.8 qui offre un exemple de dispositif électromécanique implantable[1], l'effort de recherche à développer est à la hauteur des progrès qu'il s'agit d'accomplir en termes de miniaturisation, d'intégration, et d'autonomie énergétique.

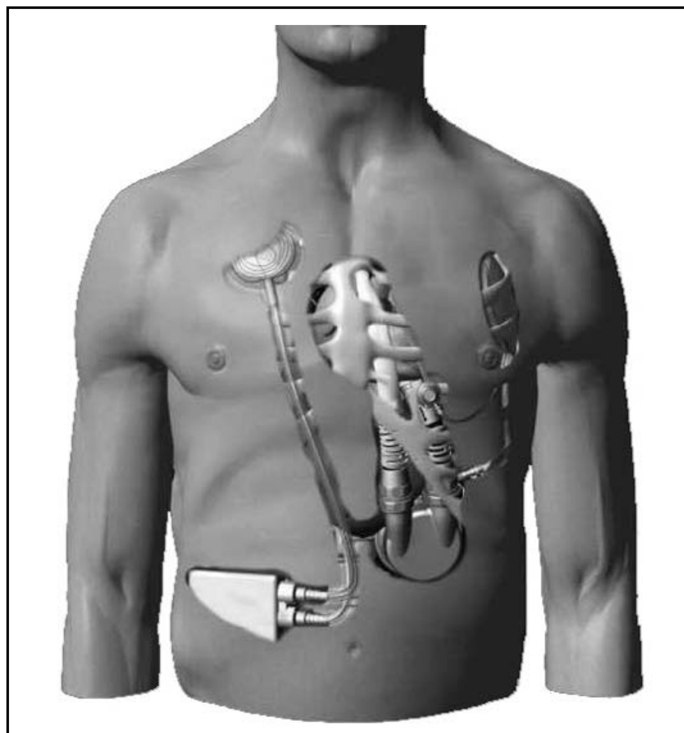


Figure 1.8 Vue des éléments internes (boîtier de commande, bobine réceptrice, pompe, chambre de compliance) du système d'assistance monoventriculaire gauche totalement implantable « Lion Heart » développé par la société ARROW (Document APHP - Pitié Salpêtrière)

Enfin, on ne saurait mesurer les enjeux de l'électrodynamique appliquée sans évoquer le thème émergent des *actionneurs répartis*. Réfutant le principe d'une localisation de la source produisant l'effort ou le mouvement, l'idée consiste à distribuer les actions produites au sein même du milieu qu'il s'agit d'activer. Si la mise en oeuvre d'une telle approche semble irréaliste à partir des procédés de conversion

(1) Actionné par un moto-réducteur à aimants permanents, le ventricule du système d'assistance « Lion Heart » dispose d'une autonomie de 30 minutes environ hors alimentation. L'énergie est transmise à travers la paroi abdominale au moyen d'une boucle d'induction. La masse totale des éléments implantés est de 1,5 kg.

classiques (corps solides en interaction électromagnétique), le concept d'actionneur réparti prend tout son sens dès lors que l'on considère les performances et les fonctionnalités offertes par les *matériaux électroactifs* (céramiques piézoélectriques, alliages à mémoire de forme, etc.). L'intégration de plusieurs fonctionnalités évoluées au sein d'un seul et même élément renvoit alors au concept de matériaux « intelligents » (« astucieux » serait plus raisonnable), en référence au terme anglosaxon de *smart material* [**29**]. Si elles intéressent de nombreux domaines d'utilisation, les structures électroactives trouvent un écho particulièrement favorable en aéronautique, donnant lieu notamment au concept d'*aile active* [**30**]. Plus généralement, la répartition d'actions d'origine électrodynamique le long de surfaces actives constitue une des voies d'investigation privilégiées du *contrôle actif des écoulements*. La figure 1.9 présente à titre d'exemple un dispositif piézoélectrique à lames multiples visant à étudier l'effet d'ondes de surfaces sur la traînée de frottement engendrée par l'écoulement d'un fluide le long d'une paroi active [**31**].

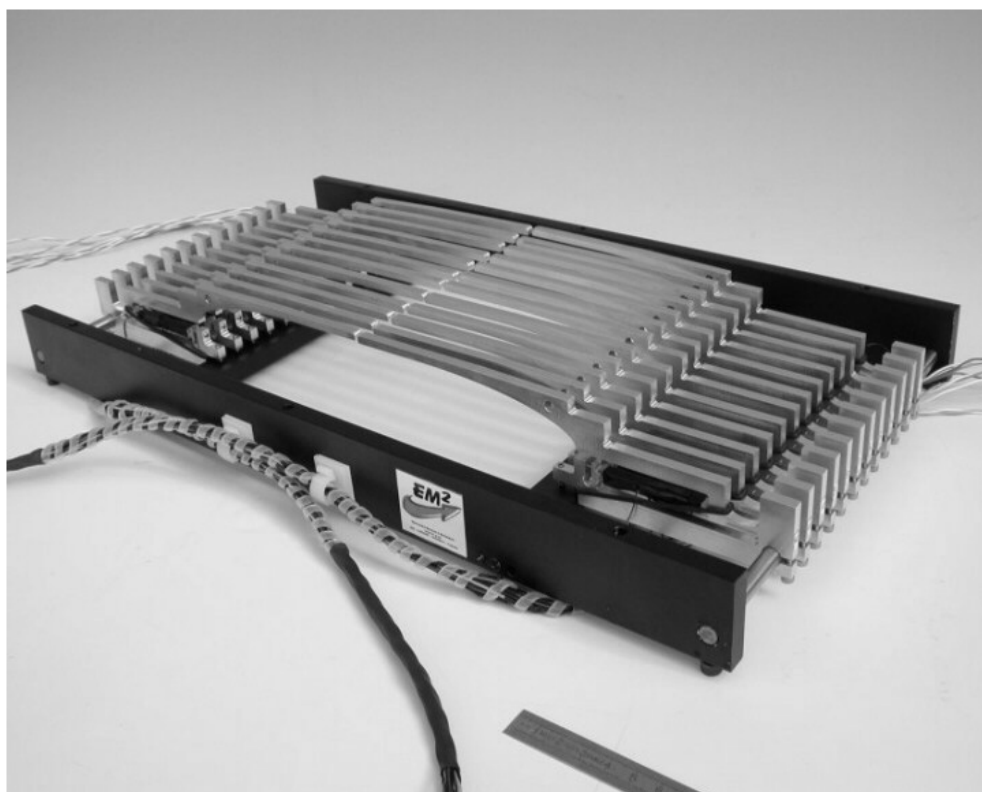


Figure 1.9 Parties actives d'un dispositif piézoélectrique expérimental destiné à la réduction de la traînée de frottement (© INPT/CNRS/D.H.)

Chapitre **2**

Lois fondamentales de l'électrodynamique

Si les lois régissant les phénomènes électromagnétiques ont été établies dans un contexte « classique » à la fin du XIXe siècle, il n'en reste pas moins que la nature de l'électrodynamique est profondément relativiste. Cent ans après la publication du premier volet de la théorie d'Einstein, il peut sembler naïf de rappeler ici le rôle capital que joue la relativité restreinte dans notre conception des phénomènes d'interaction électromagnétique. Bien plus que de simples « corrections » visant à étendre la validité d'un modèle classique au domaine des grandes vitesses[(1)], les doctrines relativistes offrent un cadre cohérent et rigoureux pour la compréhension et l'étude des interactions subies par des sources électromagnétiques en mouvement relatif.

Pourtant, la plupart des ouvrages traitant de l'électromagnétisme appliqué reproduisent des schémas didactiques convenus dans lesquels les équations de Maxwell sont développées dans le contexte de l'analyse vectorielle en trois dimensions. Certains aspects, touchant notamment à l'électrodynamique de la matière en mouvement, requièrent alors l'introduction de concepts physiques plus ou moins discutables. Certes, l'approche traditionnelle est parfaitement opérante tant que les

(1) La vitesse des charges qui constituent les courants circulant dans les conducteurs utilisés en électrotechnique est de l'ordre de 1 $\mathrm{mm.s^{-1}}$ à peine. L'équilibre électrique qui règne au sein du conducteur entre les charges de signes opposés neutralise les effets de nature électrostatique. En revanche, bien que la vitesse des porteurs soit largement inférieure à celle de la lumière, ces charges sont en quantité telle que les effets relativistes liés à leur déplacement sont parfaitement perceptibles. Le champ magnétique engendré au voisinage d'un conducteur parcouru par un courant en est une manifestation directe.

phénomènes sont systématiquement rapportés à un même référentiel. On en mesure cependant les limites dès lors que les sources se déplacent, et cela face à des questions pourtant tout à fait élémentaires telles que l'induction homopolaire par exemple (cf. section 4.3.6). Aussi, sans chercher à développer de manière exhaustive une question abordée au plan théorique dans plusieurs ouvrages de référence [**2**] [**36**], l'espace-temps à quatre dimensions constitue le cadre privilégié dans lequel le présent exposé décline les lois de l'électrodynamique.

Le concept de champ électromagnétique fait l'objet de la première partie du chapitre. La prise en compte des milieux matériels est ensuite envisagée selon le double point de vue de l'électrodynamique et de la mécanique des milieux continus. Les équations générales associées à ces deux volets majeurs de l'électromécanique sont alors établies comme la conséquence d'un principe physique unique, le principe de moindre action. Les questions touchant plus spécifiquement à la conversion d'énergie dans le champ électromagnétique sont enfin discutées à la fin du chapitre.

Mentionnons que le formalisme adopté fait une large place à l'outil tensoriel. Ce choix vise à dégager des lois intrinsèquement liées à la réalité physique considérée, indépendamment des systèmes de référence variés dans lesquels cette réalité peut être exprimée. Quelques notions pratiques sur l'utilisation des tenseurs ainsi qu'une sélection bibliographique appropriée sont proposées en annexe.

2.1 LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

2.1.1 L'espace-temps et ses invariants

Le temps et l'espace sont deux notions indissociables qui fondent un univers relativiste, ou *espace-temps*, à quatre dimensions. Cet univers étant classiquement rapporté à un système de coordonnées rectilignes orthogonales, tout *événement* y est alors représenté par un *quadrivecteur* $\mathbf{x}$ (vecteur de l'espace E_4) dont les composantes x^λ correspondent à la suite des quatre nombres $\left(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z\right)$, où c désigne la vitesse de la lumière, t la date à laquelle se produit l'événement, x, y, et z les coordonnées spatiales du point M où il a lieu dans le référentiel considéré[(1)]. À l'instar du 4-vecteur événement dont les composantes x^1, x^2, x^3 forment un vecteur de l'espace tridimensionnel (le rayon vecteur $\mathbf{OM}$), tout 4-vecteur de composantes q^λ résulte formellement de l'assocation d'une composante purement temporelle et d'un vecteur spatial, ce que l'on exprimera en écrivant $q^\lambda = \left(q^0, \mathbf{q}\right)$.

La « distance » entre deux événements de l'espace à quatre dimensions est appelée *intervalle*. Conformément aux notations classiquement adoptées en relativité (cf. section A.2.6), l'intervalle séparant deux événements infiniment voisins s'écrit :

$$(ds)^2 = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (2.1)$$

(1) Les conventions d'écriture utilisées sont explicitées à la section A.1 de l'annexe.

où $g_{\lambda\mu}$ désigne le *tenseur fondamental* qui définit la métrique dont l'espace est muni. Avec le système de coordonnées choisi (coordonnées rectilignes), ce tenseur est représenté par une matrice diagonale telle que $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{\lambda\mu} = 0$ pour $\lambda \neq \mu$ (cf. relation .35).

En vertu du postulat de relativité, les phénomènes physiques se déroulent de manière identique dans tous les référentiels inertiels (référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres). Il est donc légitime de chercher à mettre les lois de la physique sous une forme *covariante*, indépendante du système de référence choisi. Une question fondamentale consiste donc à identifier les grandeurs physiques *invariantes* lors d'un changement de référentiel galiléen. L'intervalle défini par la relation (2.1) joue précisément le rôle d'un *invariant* (scalaire) de l'espace-temps. De même, les vecteurs (tels que le 4-vecteur événement par exemple) constituent-ils des invariants qui gardent une signification physique intrinsèque, indépendamment de la base sur laquelle ils sont décomposés. Ceci suppose en particulier que leurs composantes obéissent à des lois de transformation précises lors d'un changement de référentiel (un jeu de 4 nombres ne constituent pas nécessairement les composantes d'un 4-vecteur !). Considérons en particulier le cas de deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ dont les axes sont parallèles deux à deux, le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplaçant à la vitesse v dans le sens des x croissants par rapport à $\mathcal{R}$ (les origines de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident pour $t = t' = 0$). Si x^λ et x'^μ désignent respectivement les composantes d'un vecteur $\mathbf{x}$ (ou les coordonnées du point-événement de l'espace affine associé) par rapport aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, alors ces composantes sont assujetties à la *transformation de Lorentz spéciale* telle que :

$$x^\lambda = \mathcal{L}^\lambda_\mu x'^\mu \tag{2.2}$$

$$x'^\mu = \mathcal{L}'^\mu_\lambda x^\lambda$$

où les quantités $\mathcal{L}^\mu_\lambda$ et $\mathcal{L}'^\lambda_\mu$ sont explicitées en annexe (cf. section A.2.6).

Remarquons que ces lois de transformations, écrites à l'aide des composantes *contravariantes* x^λ du vecteur $\mathbf{x}$ (indices en position supérieure, conformément aux règles détaillées à la section A.2.2) sont strictement inverses des relations de passage que suivent les vecteurs *covariants* formant la base $(\mathbf{e}_\lambda)$. Dès lors, la grandeur $\mathbf{x} = x^\lambda \mathbf{e}_\lambda = x'^\mu \mathbf{e}'_\mu$ apparaît bien comme un invariant (vectoriel) de l'espace considéré.

Parmi les 4-vecteur jouant un rôle majeur en électrodynamique, on peut citer le *4-vecteur courant* défini par $\mathcal{J}^\lambda = (c\rho, \mathbf{j})$. Ce vecteur regroupe en une seule et même entité les sources locales du champ que constituent la densité volumique de charge ρ et la densité de courant volumique $\mathbf{j}$ (vecteur spatial). De même, le *4-potentiel* $\mathcal{A}^\lambda = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right)$ est construit en regroupant le potentiel scalaire électrique Φ et le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ [**2**].

Enfin, de même qu'un jeu de n quantités x^λ suivant une loi de transformation du type (2.2) constituent les composantes d'un vecteur $\mathbf{x}$ de E_n, un ensemble de n^2

quantités dont les lois de transformation sont telles que :

$$U^{\lambda\mu} = \mathcal{L}^{\lambda}_{\rho}\mathcal{L}^{\mu}_{\sigma}U'^{\rho\sigma} \tag{2.3}$$

$$U'^{\rho\sigma} = \mathcal{L}'^{\rho}_{\lambda}\mathcal{L}'^{\sigma}_{\mu}U^{\lambda\mu}$$

constituera les composantes d'un *tenseur* **U** (d'ordre 2)(1). Ce nouvel invariant généralise les notions de scalaire (tenseur d'ordre 0) et de vecteur (tenseur d'ordre 1). Tel que défini au paragraphe suivant, le champ électromagnétique correspond précisément à un 4-tenseur de l'espace-temps. Pour une introduction à ce sujet majeur, dont la portée concerne tant l'électricité que la mécanique, on pourra se reporter à la section A.3 de l'annexe.

2.1.2 Tenseur du champ électromagnétique

Dans l'univers relativiste, électricité et magnétisme apparaissent fondamentalement comme la manifestation d'une seule et même réalité physique attachée au concept de *champ électromagnétique*. Cette réalité est formellement décrite par un tenseur antisymétrique du deuxième ordre $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$, appelé *tenseur champ électromagnétique*, dont la représentation matricielle correspond au tableau :

$$\left[\mathcal{F}^{\lambda\mu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{E_x}{c} & -\dfrac{E_y}{c} & -\dfrac{E_z}{c} \\ \dfrac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \dfrac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \dfrac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

où les grandeurs E_x, E_y, E_z et B_x, B_y, B_z correspondent respectivement aux composantes de ce que l'on a coutume d'appeler les « vecteurs » champ électrique **E** et champ magnétique **B** de l'espace à trois dimensions. On adoptera ainsi très souvent la notation $\mathcal{F}^{\lambda\mu} = \left(\dfrac{\mathbf{E}}{c}, \mathbf{B}\right)$. Compte tenu de la forme particulière du tenseur métrique, les composantes complètement covariantes $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$ du tenseur de champ s'obtiendront simplement en inversant le signe des termes de la première ligne et de la première colonne de la matrice (2.4), ce qui revient à écrire $\mathcal{F}_{\lambda\mu} = \left(-\dfrac{\mathbf{E}}{c}, \mathbf{B}\right)$.

Il convient cependant de noter que la nature de **E** et **B** reste fondamentalement différente (cf. section A.3.6). Pour s'en convaincre, on peut notamment examiner les lois de transformation que suivent les grandeurs $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$, **E** et **B** lors d'un changement de

(1) Selon un abus de langage largement répandu dans la pratique des tenseurs [**32**], on parlera souvent du « tenseur $U^{\lambda\mu}$ » (ou du « vecteur x^{λ} ») pour désigner le tenseur $\mathbf{U} = U^{\lambda\mu}\mathbf{e}_{\lambda} \otimes \mathbf{e}_{\mu}$ (respectivement le vecteur $\mathbf{x} = x^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda}$).

référentiel. Considérons à cet effet les conséquences d'une simple *réflexion spatiale* opérée, par exemple, par rapport au plan yOz (on change le sens de l'axe Ox tout en conservant celui des axes Oy et Oz). Les matrices de changement de base $\mathcal{P}^{\lambda}_{\mu}$ et $\mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}$ décrivant cette transformation particulière sont telles que (cf. section A.1.3) :

$$\begin{cases} \mathcal{P}^0_0 = \mathcal{P}'^0_0 = 1, \\ \mathcal{P}^1_1 = \mathcal{P}'^1_1 = -1, \\ \mathcal{P}^2_2 = \mathcal{P}'^2_2 = \mathcal{P}^3_3 = \mathcal{P}'^3_3 = 1, \\ \mathcal{P}^{\lambda}_{\mu} = \mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda} = 0 \text{ pour } \lambda \neq \mu \end{cases} \tag{2.5}$$

Dès lors, le tenseur $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ suivant par définition une loi conforme à la relation (2.3), ses composantes spatio-temporelles ($\mathcal{F}^{0i}$) sont telles que E_x se change en $-E_x$ alors que E_y et E_z se conservent. En revanche, la transformation de ses composantes purement spatiales ($\mathcal{F}^{ik}$) s'opère avec un changement de signe de B_y et B_z, tandis que B_x se conserve. En conséquence, si **E** désigne un « vrai vecteur » de l'espace à trois dimensions, qui, conformément à une loi du type de (2.2), se transforme en son symétrique lors d'une réflexion d'espace, **B** devra être considéré comme un « pseudo-vecteur » de l'espace tridimensionnel qui se change en l'opposé de son symétrique lors de cette même réflexion d'espace (cf. section A.3.5). Ce caractère pseudo-vectoriel se traduit concrètement par les nombreuses précautions et règles d'usage qui président à la manipulation du champ magnétique et des grandeurs qui s'y rapportent (règles des « trois doigts » et autres « tire-bouchons »). Remarquons que ces précautions deviennent parfaitement inutiles dès lors que l'on ne sépare pas les composantes spatio-temporelles (liées à **E**) et spatiales (relatives à **B**) du tenseur $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ qui, seul, possède une signification physique intrinsèque.

2.1.3 Champ et potentiels

Dans la théorie des champs (électromagnétique ou gravitationnel), l'interaction entre deux particules se traduit par la force que subit l'une des particules de la part du champ (de force) engendré par l'autre dans son environnement. Bien plus qu'un intermédiaire commode pour décrire les actions à distance « instantanées » de la mécanique classique, le concept de champ est indissociable de l'idée d'une interaction propagée à vitesse finie (la première particule interagit avec le champ qui, passé un certain délai, interagira à son tour avec la deuxième particule). Le champ constitue en celà un être à part entière de la physique relativiste (et donc de l'électromagnétisme). D'autre part, de même que les forces de gravitation peuvent être appréhendées par dérivation spatiale d'une fonction potentiel, le champ de force d'origine électromagnétique peut également être décrit au moyen des *potentiels* dont il dérive. Le tenseur $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ donné par la relation (2.4) se définit alors comme le rotationnel du 4-potentiel

$\mathcal{A}^\lambda = \left(\dfrac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right)$ conformément à la formule (cf. section A.6) :

$$\mathcal{F}^{\lambda\mu} = \partial^\lambda \mathcal{A}^\mu - \partial^\mu \mathcal{A}^\lambda = g^{\lambda\rho}\partial_\rho \mathcal{A}^\mu - g^{\mu\sigma}\partial_\sigma \mathcal{A}^\lambda \tag{2.6}$$

($g^{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}$ dans le cas de la métrique considérée).

On en déduit alors immédiatement pour les composantes spatio-temporelles :

$$\begin{cases} -\dfrac{E_x}{c} = \mathcal{F}^{01} = \partial_0 \mathcal{A}^1 + \partial_1 \mathcal{A}^0 = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_x}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ -\dfrac{E_y}{c} = \mathcal{F}_{02} = \partial_0 \mathcal{A}^2 + \partial_2 \mathcal{A}^0 = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_y}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ -\dfrac{E_z}{c} = \mathcal{F}_{03} = \partial_0 \mathcal{A}^3 + \partial_3 \mathcal{A}^0 = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_z}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases} \tag{2.7}$$

ce que traduit l'écriture vectorielle (dans l'espace tridimensionnel) :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\,\Phi \tag{2.8}$$

De même, les composantes purement spatiales donnent :

$$\begin{cases} -B_z = \mathcal{F}^{12} = -\partial_1 \mathcal{A}^2 + \partial_2 \mathcal{A}^1 = -\dfrac{\partial A_y}{\partial x} + \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \\ B_y = \mathcal{F}^{13} = -\partial_1 \mathcal{A}^3 + \partial_3 \mathcal{A}^1 = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x} + \dfrac{\partial A_x}{\partial z} \\ -B_x = \mathcal{F}^{23} = -\partial_2 \mathcal{A}^3 + \partial_3 \mathcal{A}^2 = -\dfrac{\partial A_z}{\partial y} + \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \end{cases} \tag{2.9}$$

d'où la relation bien connue :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \tag{2.10}$$

On mesure ici la puissance et la concision du formalisme tensoriel qui rassemble, au sein de l'expression covariante (2.6), les deux formules vectorielles définissant les champs électrique et magnétique en fonction des potentiels scalaire et vecteur. Notons par ailleurs que, en vertu des propriétés du rotationnel, les composantes du champ demeurent inchangées si le 4-potentiel $\mathcal{A}^\lambda$ est augmenté du gradient $\partial^\lambda \Psi$ d'un champ de scalaire Ψ quelconque. Afin de lever cette ambiguïté, on peut alors imposer au potentiel de satisfaire à une condition supplémentaire, de préférence covariante si l'on souhaite garantir l'invariance des formulations établies. La *jauge de Lorentz* impose ainsi la nullité de la divergence du 4-potentiel, selon la relation manifestement covariante (cf. section A.7) :

$$\nabla_\lambda \mathcal{A}^\lambda = \partial_\lambda \mathcal{A}^\lambda = 0 \tag{2.11}$$

Exprimée en fonction des potentiels scalaire et vecteur, cette condition s'écrira classiquement :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{2.12}$$

Lorsque les phénomènes ne dépendent pas du temps (cas de l'électrostatique ou de la magnétostique), il est naturel d'adopter la jauge de Coulomb définie par div $\mathbf{A} = 0$ [**37**]. Il convient cependant de noter que cette nouvelle condition ne respecte plus la covariance initiale. Aussi, sa validité n'est établie a priori qu'au sein d'un référentiel donné, à l'exclusion de tout changement de référentiel.

2.2 ÉLECTROMAGNÉTISME ET MILIEUX MATÉRIELS

2.2.1 Polarisation électrique et magnétique de la matière

Les propriétés électromagnétiques de la matière sont classiquement décrites, à l'échelle *macroscopique*, en termes de *polarisation électrique* **P** et d'*aimantation* **M** (on raisonnera souvent sur la *polarisation magnétique* $\mathbf{J} = \mu_0\mathbf{M}$). Dans le cadre de l'hypothèse des milieux continus[(1)], ces grandeurs locales sont respectivement définies comme les densités volumiques de moments dipolaires électrique et magnétique [**38**]. Selon un autre point de vue, le milieu polarisé peut être représenté au moyen de charges et de courants « fictifs » qui, placés dans le vide, produisent les mêmes effets électromagnétiques. Ainsi, par opposition aux charges et courants *libres* (sources électromagnétiques « vraies ») à l'origine du champ extérieur baignant le milieu, ces *charges de polarisation* et *courants d'aimantation* internes sont indissociables de la matière : on parle de charges et de courants *liés*. Les densités ρ_p et $\mathbf{j}_m$ qui les définissent localement se déduisent respectivement des champs de polarisation électrique et magnétique par les relations (écrites dans un référentiel par rapport auquel la matière est au repos) :

$$\left\{\begin{aligned} \rho_p &= -\operatorname{div}\mathbf{P} \\ \mathbf{j}_m &= \mathbf{rot}\,\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}\,\mathbf{J} \end{aligned}\right. \tag{2.13}$$

On peut donner une interprétation physique très simple de ces équivalences, comme l'illustre sur la figure 2.1. Considérons à cet effet le cas d'un milieu diélectrique uniformément polarisé (figure 2.1 (a)). Les dipôles élémentaires que renferme

(1) Les propriétés physiques de la matière sont supposées évoluer continûment entre deux points voisins. Les fluctuations correspondant à la structure moléculaire de la matière sont négligées. Dès lors, les champs microscopiques peuvent être remplacés par leur valeur moyenne.

le matériau[1] sont alignés le long de l'axe de polarisation électrique (**P**). Cette polarisation étant uniformément distribuée, les charges dipolaires se compensent deux à deux à l'intérieur du diélectrique, si bien que la densité volumique de charge de polarisation ρ_p est nulle dans tout son volume. En revanche, les dipôles situés au voisinage immédiat des interfaces avec le milieu extérieur (dans un plan perpendiculaire à l'axe de polarisation) ne sont que partiellement compensés, laissant apparaître une charge surfacique de densité σ_p, négative sur la face où **P** est « entrant » et positive sur la face où il est « sortant ». Ces différentes observations se révèlent ainsi en parfaite adéquation avec les propriétés de l'opérateur divergence : ρ_p est identiquement nul du fait qu'il résulte de la divergence d'un champ uniforme, tandis que l'application du théorème d'Ostrogradsky fournit immédiatement [**37**] :

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}, \text{ où } \mathbf{n} \text{ désigne la normale unitaire sortante} \tag{2.14}$$

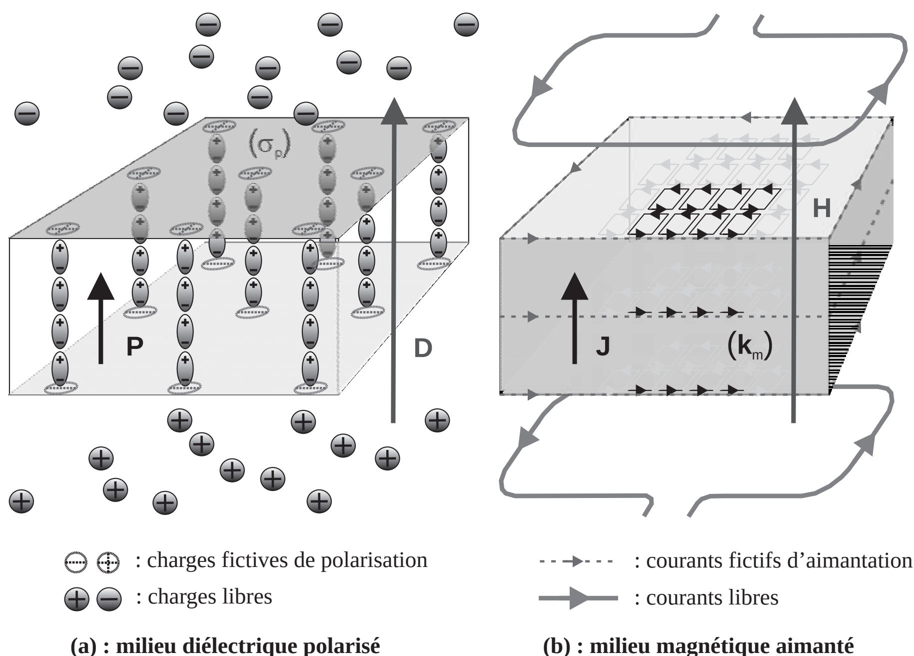


Figure 2.1 Représentation des dipôles et des boucles de courant microscopiques respectivement associés à la polarisation uniforme d'un milieu diélectrique (a) et d'un milieu magnétique (b)

(1) Le phénomène de polarisation électrique résulte de trois mécanismes élémentaires, agissant généralement de manière conjointe. La polarisation *électronique* tient à une déformation du nuage électronique à l'échelle atomique. La polarisation *ionique* découle d'un décalage des barycentres des charges positives et négatives à l'échelle moléculaire, par déformation de la maille cristalline. Enfin, à l'échelle mésoscopique, la polarisation peut naître d'une *orientation* de dipôles permanents (existant de manière spontanée mais initialement orientés de manière quelconque) sous l'effet d'un champ extérieur.

On raisonnera d'une manière similaire quant à l'interprétation du caractère rotationnel des courants fictifs d'aimantation (figure 2.1 (b)). Les dipôles magnétiques agissent ici comme des boucles de courant internes qui se compensent à l'intérieur du corps uniformément aimanté, tandis qu'apparaît à sa périphérie un courant fictif superficiel dont la densité linéique $\mathbf{k}_m$ s'obtient classiquement par [**37**] :

$$\mathbf{k}_m = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{J} \wedge \mathbf{n} \tag{2.15}$$

On pourra trouver dans la référence [**39**] une étude détaillée de la physique gouvernant les propriétés magnétiques de la matière.

2.2.2 Tenseurs du champ dans les milieux polarisés

Conformément aux concepts introduits au paragraphe 2.1, l'électromagnétisme du vide repose sur la définition d'une seule et même notion : le tenseur $\mathcal{F}^{\lambda\mu} = \left(\frac{\mathbf{E}}{c}, \mathbf{B}\right)$. La généralisation de ces concepts au cas de milieux matériels, électriquement ou magnétiquement polarisés, nécessite l'introduction de nouvelles grandeurs physiques rendant compte des différents types de sources électromagnétiques en présence.

Au sein d'un diélectrique polarisé (cf. figure 2.1), il conviendra de distinguer le champ électrique **E**, résultant de l'ensemble des charges agissantes, du champ de *déplacement électrique* **D** gouverné par les charges libres placées dans son environnement. La différence entre ces deux champs tient à la contribution des charges fictives de polarisation (à l'origine du champ dépolarisant $-\mathbf{P}/\epsilon_0$), comme en témoigne la loi générale des milieux polarisés :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P}) \tag{2.16}$$

De même, à l'intérieur d'un corps aimanté, le champ **B** se compose d'un terme intrinsèquement lié aux sources extérieures (courants libres) et dont rend compte le champ d'*excitation magnétique* **H**, auquel s'ajoute la contribution des courants fictifs d'aimantation. L'équation de définition des milieux aimantés s'exprime ainsi par :

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{J} \tag{2.17}$$

Il convient cependant de noter que, à l'instar des « composantes » **E** et **B** du tenseur champ électromagnétique, les quantités **P** et **J**, de même que **D** et **H**, n'ont pas d'existences indépendantes (on s'en convaincra en examinant les effets d'un changement de référentiels à la section 4.3.2). Ainsi, dans l'univers relativiste, ces quantités définissent deux nouveaux 4-tenseurs : le tenseur des *moments* $\mathcal{M}^{\lambda\mu} = \left(c\mathbf{P}, -\frac{\mathbf{J}}{\mu_0}\right)$ et le tenseur des *excitations* $\mathcal{G}^{\lambda\mu} = (c\mathbf{D}, \mathbf{H})$. Les matrices associées, explicitées dans le tableau (.1) de l'annexe A.3.6, se déduisent de $\left[\mathcal{F}^{\lambda\mu}\right]$ en remplaçant respectivement dans (2.4) les composantes $\frac{E_i}{c}$ et B_k par cP_i et $-\frac{J_k}{\mu_0}$, d'une part, et par cD_i

et H_k, d'autre part. Dès lors, les relations (2.16) et (2.17) fusionnent en une seule et même équation gouvernant la polarisation électrique et magnétique de la matière :

$$\mathcal{F}^{\lambda\mu} = \mu_0 \left(\mathcal{G}^{\lambda\mu} - \mathcal{M}^{\lambda\mu} \right) \tag{2.18}$$

(on rappelle que $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$).

2.2.3 Déformation des milieux continus

Outre sa capacité à se polariser, la matière constituant les systèmes électromécaniques est également susceptible de se déformer. Cette déformation résulte en pratique des efforts statiques et dynamiques auxquels sont sousmis les éléments fixes et mobiles des objets considérés. Elle peut également trouver son origine dans les couplages électro-magnéto-élastiques qui s'opèrent au coeur même de la matière (piézoélectricité, magnétostriction, etc.).

Afin d'établir succintement les principaux résultats de la théorie classique des milieux continus déformables (solides), étudions, comme l'illustre la figure 2.2, les conditions de transformation d'un corps de forme quelconque, rapporté à un repère orthonormé $\left(O, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z\right)$(1). Pour chaque point matériel M du corps déformé, on peut, connaissant sa situation M_0 au repos (avant déformation), définir le vecteur $\mathbf{u}(M) = \mathbf{M_0M}$, appelé *vecteur déplacement*. La connaissance de $\mathbf{u}$ en tout point du solide définit complètement la transformation du corps.

Une autre manière de définir la déformation du milieu consiste à s'intéresser aux variations que subit la distance élémentaire séparant deux points infiniment proches. Avant déformation, le carré de cette distance s'écrit(2) :

$$dl_0^2 = dx_i^2 \tag{2.19}$$

tandis que l'on a pour le corps déformé :

$$\begin{aligned} dl^2 &= (dx_i + du_i)^2 = (dx_i + \partial_k u_i \, dx_k)^2 \\ &= dx_i^2 + 2\, \partial_k u_i \, dx_i dx_k + \partial_i u_j \, \partial_k u_j \, dx_i dx_k \end{aligned} \tag{2.20}$$

Il vient alors :

$$dl^2 = dl_0^2 + 2\, S_{ik} \, dx_i dx_k \tag{2.21}$$

avec :

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\partial_k u_i + \partial_i u_k + \partial_i u_j \, \partial_k u_j \right)$$

(1) La théorie des milieux continus déformables peut être développée dans le contexte plus général de coordonnées curvilignes (cf. section A.4). Le recours à un tel formalisme offre alors l'avantage, en théorie de l'élasticité notamment, de s'adapter à des géométries très variées (disques, tubes, coques, etc.) [**40**].

(2) On rappelle que, l'espace étant ici rapporté à un repère orthonormé, il n'y a pas lieu de distinguer les composantes contravariantes et covariantes des vecteurs et tenseurs considérés (cf. annexe A.2.2). Les indices sont donc systématiquement placés au bas des lettres supports qui désignent les quantités considérées.

où le tenseur S_{ik}, manifestement symétrique ($S_{ik} = S_{ki}$), est appelé *tenseur de déformation*. Sa connaissance en tout point du milieu définit entièrement la transformation. On montre en outre que la somme S_{ii} (opérée sur les termes diagonaux de $[S_{ik}]$) correspond, au premier ordre près, à la variation relative du volume élémentaire entourant le point considéré. Lorsque les déformations sont faibles, le vecteur déplacement et ses dérivées spatiales le sont aussi dans la plupart des cas [**41**]. On peut alors négliger les termes du second ordre dans l'expression de dl^2 et le tenseur de déformation s'écrit finalement :

$$S_{ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_i + \partial_i u_k\right) \tag{2.22}$$

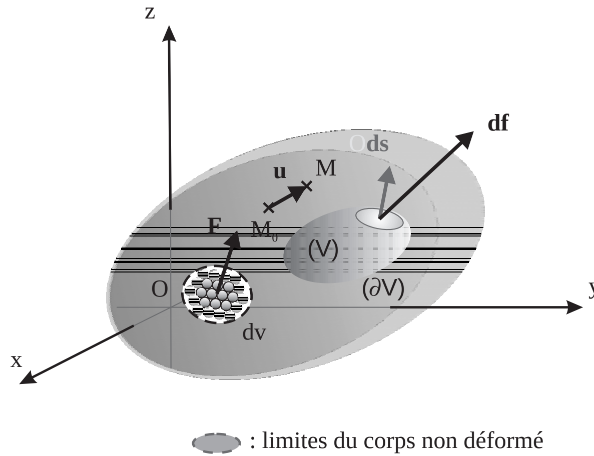


Figure 2.2 Grandeurs caractéristiques de la déformation d'un milieu continu

En ce qui concerne d'autre part les forces de *tensions internes* qui tendent généralement à ramener le corps vers sa situation de repos, elles se caractérisent, en théorie de l'élasticité, par le fait que leur rayon d'action est négligeable par rapport aux distances élémentaires de l'échelle macroscopique (on exclut pour l'instant le cas de milieux soumis à des forces d'origine électromagnétique opérant « à distance »). Ainsi, les actions mécaniques se transmettent « de proche en proche » à l'intérieur du matériau, si bien que les forces développées au sein d'un volume (V) quelconque sont nécessairement communiquées au reste du milieu à travers la surface (∂V) qui le délimite. Ce raisonnement demeure valable à l'évidence si le volume (V) coïncide avec celui du corps tout entier. En d'autres termes, **F** désignant la force locale par unité de volume, la résultante des forces donnée par l'intégrale $\int \mathbf{F} dv$ doit pouvoir formellement se ramener à une intégrale de surface prise sur la frontière du domaine considéré. Généralisant ainsi le théorème d'Ostrogradsky de l'analyse vectorielle, cette transformation suppose que la force F_i s'identifie à la divergence d'une quantité tensorielle du second ordre appelée *tenseur de contrainte* et notée T_{ik}.

Il vient alors :

$$\int_{(V)} F_i dv = \int_{(V)} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dv = \int_{(\partial V)} T_{ik} ds_k \tag{2.23}$$

où ds_k désigne les composantes de l'élément de surface **ds**, aire sur laquelle le milieu extérieur au volume (V) exerce la force élémentaire $df_i = T_{ik} ds_k$ (cf. figure 2.2).

De même que S_{ik}, T_{ik} est un tenseur symétrique. Cette propriété découle du fait que, à l'instar de la résultante des forces, le moment γ_{mn} des forces de contraintes internes se ramène à une intégrale de surface conformément à la relation[(1)] :

$$\gamma_{mn} = \int_{(V)} (F_m x_n - F_n x_m)\, dv = \int_{(\partial V)} (T_{mk} x_n - T_{nk} x_m)\, ds_k \tag{2.24}$$

De par leur symétrie, les tenseurs de déformation et de contrainte sont construits à partir de six composantes distinctes, quantités dont la signification physique est précisée dans le tableau 2.1. Afin d'alléger les écritures, l'ingénieur a souvent recours à une notation condensée (cf. 2e colonne du tableau 2.1) fondée sur l'utilisation de « vecteurs » à six composantes S_λ et T_λ. Les indices 1, 2, 3 se rapportent alors aux tensions *normales* (traction, compression) le long des 3 axes du repère tandis que les indices 4, 5, et 6 ont trait aux effets de *cisaillement* autour de ces mêmes axes.

Enfin, on montre que le travail par unité de volume des forces de contraintes internes, lors d'une variation δS_{ik} du tenseur de déformation, s'exprime par [**41**] :

$$\delta W = T_{ik} \delta S_{ik} \quad (= T_\lambda \delta S_\lambda) \tag{2.25}$$

Par conséquent, considérant une déformation élastique[(2)] opérée selon un processus quasi-statique et donc réversible d'un point de vue thermodynamique, la variation d'énergie interne U du corps s'identifie au travail des forces de contraintes, en supposant que l'entropie volumique σ et les autres paramètres extensifs Q_j dont dépend éventuellement l'énergie sont maintenus constants (cf. chapitre 3). Dès lors, les composantes du tenseur de contrainte satisfont à la relation :

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial U}{\partial S_{ik}} \right)_{\sigma, Q_j} \tag{2.26}$$

(1) Le moment par rapport à O d'une force **f** s'appliquant en M forme par définition le tenseur antisymétrique du deuxième rang de composantes $(f_m x_n - f_n x_m)$. On utilise souvent le pseudo-vecteur $\gamma = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}$ adjoint à ce tenseur (cf. section A.3.5) dont les composantes s'écrivent sous forme indicielle $\gamma_i = \epsilon_{ikl} f_k x_l$ (ϵ_{ikl} désigne le symbole d'antisymétrie, cf. section A.1.2).

(2) On exclut de notre propos le cas des déformations *plastiques* pour lesquelles subsiste une déformation résiduelle après que les forces extérieures ont été supprimées.

Tableau 2.1 Composantes élémentaires des tenseurs de déformation et de contrainte

Composantes tensorielles $\mathbf{S_{ik}, T_{ik}}$ $(\mathbf{i}, \mathbf{k} \in \{1, 2, 3\})$	**Notations « condensées »** $\mathbf{S_\lambda, T_\lambda}$ $(\boldsymbol{\lambda} \in \{1, \ldots, 6\})$	**Dénomination usuelle**	**Déformations du cube de référence**
S_{11} T_{11}	S_1 T_1	tension normale d'axe *Ox*	(1)
S_{22} T_{22}	S_2 T_2	tension normale d'axe *Oy*	(2)
S_{33} T_{33}	S_3 T_3	tension normale d'axe *Oz*	(3)
S_{23} T_{23}	$\frac{1}{2}S_4$ T_4	cisaillement autour de l'axe *Ox*	(4)
S_{31} T_{31}	$\frac{1}{2}S_5$ T_5	cisaillement autour de l'axe *Oy*	(5)
S_{12} T_{12}	$\frac{1}{2}S_6$ T_6	cisaillement autour de l'axe *Oz*	(6)

2.3 ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES SYSTÈMES ÉLECTROMÉCANIQUES

L'équilibre dynamique des systèmes *électro-magnéto-mécaniques* est régit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles impliquant les quantités scalaires, vectorielles ou plus généralement tensorielles qui caractérisent les milieux continus à l'échelle macroscopique locale (potentiels, champ électromagnétique, champ de déformation, etc.). Connaissant les sollicitations d'origine extérieure auxquelles le système est soumis, la résolution de ces équations permet de déterminer la distribution spatio-temporelle des grandeurs locales caractéristiques de l'état du système. On peut alors en déduire l'évolution des variables décrivant son comportement global (force, vitesse, tension, courant, etc.). Fondements de l'électromécanique, les équations du champ électromagnétique et celles qui gouvernent la mécanique des milieux continus appartiennent à deux branches de la physique bien distinctes. Elles sont de ce fait généralement traitées dans le cadre de théories spécifiques. Pourtant, en tant que loi régissant le « mouvement » généralisé des corps matériels, des charges et des champs, ces équations dynamiques possèdent un fondement commun. La logique adoptée dans la présente section vise précisément à traiter les équations de l'électro- et de l'élasto-dynamique comme la conséquence d'un seul et même principe physique, le principe de moindre action.

2.3.1 Principe de moindre action

Considérons le cas général d'un système possédant *n degrés de liberté*, c'est-à-dire un système dont la « position » est déterminée de manière univoque par la donnée de n grandeurs indépendantes appelées *coordonnées généralisées*[(1)]. Ainsi, pour un système mécanique formé de N points matériels, ce nombre s'identifie aux $3N$ coordonnées cartésiennes qui repèrent chacun de ses points dans l'espace tridimensionnel. Notons que, au delà de ce repérage « naturel », il sera souvent commode de choisir un système de coordonnées généralisées spécifiquement adapté à la structure et à la nature du système étudié. Par exemple, un système mécanique articulé impliquant des éléments en rotation sera avantageusement paramétré en fonction des angles indépendants qui définissent la configuration de ses axes (plutôt qu'en choisissant un repérage cartésien sur la base duquel les relations de liaison limitant les degrés de liberté sont

(1) Ceci suppose en toute rigueur que le système ne comporte aucune liaison *non-holonôme*. Un système est dit *holonôme*, de même que les contraintes qui lui sont associées, lorsque les formes différentielles traduisant les liaisons cinématiques entre ses différents sous-ensembles sont intégrables. Ces contraintes peuvent alors être formulées à l'aide des coordonnées généralisées uniquement. La dimension n de l'espace de configuration s'identifie dans ce cas au nombre de degrés de liberté du système. En revanche, lorsque ce dernier comporte des liaisons non-holonômes (par exemple une condition de roulement avec glissement), les contraintes correspondantes réduisent d'autant le nombre de degrés de liberté, bien qu'aucunes variables ne puissent être éliminées du jeu de coordonnées initial. Dès lors, la dimension n de l'espace de configuration est égale au nombre de degrés de liberté augmenté du nombre de conditions non-holonomes.

généralement difficiles à expliciter). En outre, pour des systèmes dont la nature n'est pas seulement mécanique, la notion de coordonnée généralisée permet d'englober dans le paramétrage des grandeurs physiques autres que les variables géométriques. Ainsi, la quantité de charge accumulée sur les armatures d'un condensateur ou encore les composantes du pseudo-vecteur champ magnétique pourront-elles jouer le rôle de coordonnées généralisées pour un système électromécanique (cf. § 3.2.2).

Désignons par $\left(q^1, q^2, \ldots, q^n\right)$, ou plus brièvement par q, l'ensemble des n coordonnées généralisées caractérisant le système et par $\left(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n\right)$, respectivement $\dot{q}$, les *n vitesses généralisées* qui s'en déduisent par simple dérivation temporelle. Remarquons que la donnée de ces deux jeux de variables détermine complètement l'*état* du système, en ce sens que la connaissance des coordonnées et des vitesses à un instant donné suffit en principe à prédire son mouvement futur. Pour formuler la loi du mouvement, le principe de moindre action, ou principe de Hamilton, constitue sans nul doute une des formulations les plus universelles dont dispose le physicien, et celà face à des questions dépassant très largement le cadre de la *mécanique analytique* dans lequel il a été initialement développé [**42**]. Selon ce principe, tout système est caractérisé par une fonction scalaire des coordonnées, des vitesses et du temps, appelée *fonction de Lagrange* (ou *lagrangien*) et notée $L\,(q, \dot{q}, t)$, telle que, entre deux dates t_1 et t_2 pour lesquelles le système occupe deux positions bien déterminées, son évolution s'opère de manière à ce que l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2.27}$$

soit extrémale. L'intégrale S est appelée *intégrale d'action*, ou plus simplement action. Notons que si l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ correspond à une portion de trajectoire suffisamment petite pour ne pas contenir de points conjugués (cf. condition de Jacobi), l'extremum de S est nécessairement un minimum.

Dès lors, parmi toutes les trajectoires possibles (i.e. compatibles avec les degrés de liberté) reliant les positions occupées par le système aux instants t_1 et t_2, la loi de mouvement effectivement suivie minimise (ou maximise) l'intégrale d'action. Contrairement aux formulations *différentielles* (principe fondamental de la dynamique) qui décrivent le mouvement au travers des écarts caractérisant deux états infiniment proches, la présente formulation adopte un point de vue radicalement différent consistant à envisager les conséquences d'une variation globale de trajectoire (ou tout au moins d'une portion non-infinitésimale). Elle constitue en cela un principe *variationnel*.

Examinons à titre d'exemple le cas d'une particule élémentaire de masse m évoluant librement dans l'univers quadridimensionnel. La fonction de Lagrange associée est donnée par :

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2.28}$$

où v désigne la vitesse de la particule. L'intégrale d'action s'écrit alors :

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = -mc \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} cdt = -mc \int_{a(t_1)}^{b(t_2)} ds \qquad (2.29)$$

où ds désigne l'intervalle élémentaire défini par (2.1).

Ainsi, d'après la formule (2.29), la minimisation de l'action revient à maximiser l'intervalle séparant les événements a et b délimitant la portion de trajectoire considérée entre les dates déterminées t_1 et t_2. Cet intervalle est maximisé le long d'une ligne d'univers « droite », le maximum maximorum correspondant au cas de l'intervalle du genre « temps » ($ds^2 > 0$) pour lequel la particule est immobile. Ainsi, le mouvement de la particule libre suit, comme l'on pouvait s'y attendre, une trajectoire rectiligne uniforme. Pour les vitesses faibles ($v \ll c$), le développement de la formule (2.28) en puissance de v/c montre que le lagrangien admet comme limite (à la constante $-mc^2$ près) l'expression classique $\mathcal{E}_c = mv^2/2$ de l'énergie cinétique. Dans le cadre de cette approximation, le mouvement rectiligne uniforme apparaît alors, en vertu du principe de moindre action, comme la solution la moins « coûteuse » en terme d'énergie cinétique pour relier deux points de l'espace en un intervalle de temps donné.

Dans le cas plus fréquent où intervient une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ (par exemple lorsque la particule évolue en présence d'un champ de force extérieur), le lagrangien du système se construira de manière générale comme la différence de ses énergies cinétique et potentielle généralisées [**42**] :

$$L = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p \qquad (2.30)$$

Lorsque la fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement du temps (cas de l'exemple précédemment évoqué), le système est dit *conservatif* :

$$L(q, \dot{q}) = \mathcal{E}_c(q, \dot{q}) - \mathcal{E}_p(q) .$$

2.3.2 Équations de Lagrange

En vue d'établir les équations différentielles déterminant le minimum de l'intégrale d'action, considérons sans resteindre la généralité le cas d'un système à un seul degré de liberté suivant une trajectoire définie par la fonction $q(t)$. Si l'on remplace $q(t)$ par toute autre fonction relative à une trajectoire « virtuelle » reliant les extrémités déterminées $q(t_1)$ et $q(t_2)$, l'intégrale d'action ne pourra que croître (ou diminuer). Par conséquent, si l'écart entre les trajectoires réelle et virtuelle correspond à une fonction $\delta q(t)$ à valeur petite dans tout l'intervalle considéré et telle que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, la condition d'extremum exprimant le principe de moindre

action entraîne la stationnarité de l'intégrale d'action, soit :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt = 0 \tag{2.31}$$

La variation δq étant indépendante du temps, la variation de l'action donne :

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\left(q, \dot{q}, t\right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d}{dt} \delta q \right) \right] dt = 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Il vient alors, après intégration par partie du deuxième terme de l'intégrale :

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q dt = 0 \tag{2.33}$$

La variation de coordonnée étant nulle aux instants t_1 et t_2, le premier terme de la formule (2.33) disparaît. D'autre part, la stationnarité de l'intégrale d'action devant être assurée quelle que soit la variation δq, l'expression entre parenthèses dans l'intégrale doit être identiquement nulle. Ce raisonnement se généralise aisément au cas d'un système à n degrés de liberté. Par conséquent, le principe de moindre action se traduit sous forme différentielle par n équations indépendantes, appelées équations de Lagrange en mécanique, et données par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0 \quad \lambda \in \{1, \ldots, n\} \tag{2.34}$$

Reprenant l'exemple de la particule (les q^λ s'identifient dans ce cas aux trois coordonnées spatiales et les $\dot{q}^\lambda$ aux composantes du vecteur vitesse), le calcul des $\partial L / \partial \dot{q}^\lambda$ à l'aide de l'expression (2.28) montre que ces termes correspondent aux composantes p_λ de la *quantité de mouvement*, ou *impulsion*, de la particule ($\mathbf{p}$ tend vers $m\mathbf{v}$ pour $v \ll c$). Quant aux termes $\partial L / \partial q^\lambda$ qui s'annulent en l'absence d'énergie potentielle (cas de la particule libre), ils correspondent aux composantes de la *force* f_λ s'exerçant sur la particule.

Ainsi, sur cet exemple simple, les équations (2.34) équivalent au principe fondamental de la dynamique. Elles en constituent cependant une alternative puissante dans le cas général. En effet, comparé aux formulations standard de la mécanique « vectorielle » (théorèmes généraux), le jeu d'équations à traiter, formulé au niveau même des degrés de liberté du système, s'en trouve grandement réduit (exception faite des cas triviaux ou exemples à vocation pédagogique pour lesquels le formalisme lagrangien n'apporte pas de simplification notoire). Remarquons également que la forme

des équations (2.34) est invariante pour tout changement de référentiel, i.e. quel que soit le paramétrage choisi pour décrire les degrés de liberté du système. En outre, rappelons que ces degrés de liberté ne sont pas seulement de nature mécanique, si bien que, appliquées à l'électromagnétisme notamment, les équations de Lagrange traduiront sous une forme unifiée les liens dynamiques qui relient entre-elles les grandeurs électromagnétiques.

2.3.3 Cas de l'élastodynamique

Les systèmes électromécaniques sont constitués de corps matériels que l'on peut généralement assimiler, d'un point de vue mécanique, à des milieux continus déformables (cf. hypothèses et définitions à la section 2.2.3). Les équations générales qui régissent la déformation élastique de tels milieux, en régime statique ou dynamique, se déduisent tout naturellement du principe de moindre action.

Comme l'illustre la figure 2.3, convenons d'appliquer ce principe à un milieu continu subissant un certain mouvement depuis sa configuration de référence non-déformée (position d'équilibre en l'absence des forces extérieures), configuration dans laquelle il occupe un volume (V_0). Le corps est soumis conjointement à des forces de volume F_{a_i} s'exerçant dans (V_0) ainsi qu'à des tensions de surface T_{a_i} distribuées sur une partie $\left(\partial V_{0_T}\right)$ de son enveloppe. On suppose en outre que des déplacements u_{a_j} sont imposés sur le reste de l'enveloppe (surface $\left(\partial V_{0_u}\right)$). Soulignons que les forces appliquées et les déplacements imposés correspondent ici à des grandeurs « données » qui ne dépendent que du temps.

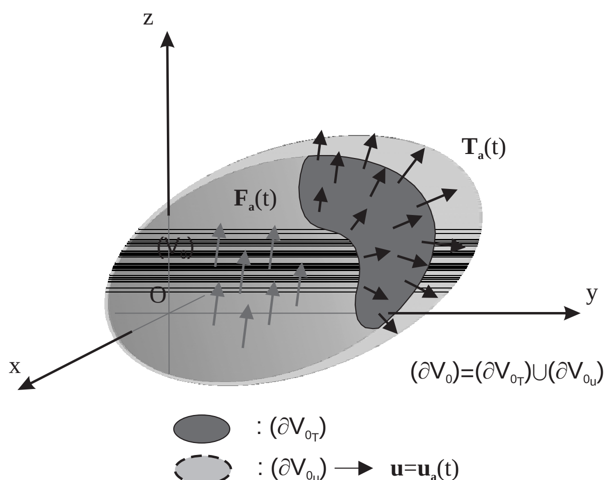


Figure 2.3 Milieu continu déformable soumis à des forces de volume, des tensions de surface et des déplacements imposés sur son enveloppe

Pour ce système continu, les degrés de liberté s'identifient aux composantes u_i du vecteur déplacement en chacun des points du corps. L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ s'exprime par :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \int_{(V_0)} \rho_{m_0} \dot{u}_i^2 dv \tag{2.35}$$

où ρ_{m_0} désigne la masse volumique du milieu non-déformé.

Quant à l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système, elle comprend, d'une part, l'énergie interne de déformation dont la densité volumique U est fonction du tenseur de déformation S_{ik}, et, d'autre part, l'énergie potentielle associée aux sources mécaniques extérieures, à l'origine des forces appliquées. L'énergie potentielle s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_p = \int_{(V_0)} U(S_{ik})\, dv - \int_{(V_0)} F_{a_i}(t)\, u_i dv - \int_{(\partial V_{0_T})} T_{a_i}(t)\, u_i ds \tag{2.36}$$

en notant que les composantes des forces données (indépendantes des degrés de liberté) apparaissent en toute logique comme la dérivée partielle du potentiel par rapport aux composantes u_i du déplacement (le signe négatif des termes d'énergie correspondants tient à la nature « extérieure » de ces forces).

Le lagrangien du système correspondant à la différence $L = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p$, le principe de moindre action donne :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{(V_0)} \left(\rho_{m_0} \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \frac{\partial U}{\partial S_{ik}} \delta S_{ik} + F_{a_i} \delta u_i \right) dv + \int_{(\partial V_{0_T})} T_{a_i} \delta u_i ds \right\} dt = 0 \tag{2.37}$$

Intégrons par parties les deux premiers termes de l'intégrale de volume. Il vient pour le premier, en tenant compte des conditions restrictives $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho_{m_0} \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \rho_{m_0} \ddot{u}_i \delta u_i dt \tag{2.38}$$

Substituant dans le deuxième terme l'expression (2.22) du tenseur de déformation pour les petites déformations, et tenant compte de la relation (2.26) exprimant la contrainte à partir de l'énergie, ce terme se met sous la forme :

$$\int_{(V_0)} \frac{\partial U}{\partial S_{ik}} \delta S_{ik} dv = \frac{1}{2} \int_{(V_0)} T_{ik} \delta (\partial_k u_i - \partial_i u_k)\, dv \tag{2.39}$$

d'où, par intégration par parties (sur le volume), en notant que la variation des déplacements ne peut porter que sur le domaine $\left(\partial V_{0_T}\right)$ où ils ne sont pas imposés :

$$\int_{(V_0)} \frac{\partial U}{\partial S_{ik}} \delta S_{ik} dv = \frac{1}{2} \int_{(\partial V_{0_T})} \left(T_{ik} \delta u_i ds_k + T_{ik} \delta u_k ds_i\right) - \frac{1}{2} \int_{(V_0)} \left(\partial_k T_{ik} \delta u_i + \partial_i T_{ik} \delta u_k\right) dv \tag{2.40}$$

soit finalement, en vertu de la symétrie du tenseur de contrainte :

$$\int_{(V_0)} \frac{\partial U}{\partial S_{ik}} \delta S_{ik} dv = \int_{(\partial V_{0_T})} T_{ik} \delta u_i ds_k - \int_{(V_0)} \partial_k T_{ik} \delta u_i dv \tag{2.41}$$

Par conséquent, la variation de l'action s'écrira :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{(V_0)} \left(\partial_k T_{ik} - \rho_{m_0} \ddot{u}_i + F_{a_i}\right) \delta u_i dv + \int_{(\partial V_{0_T})} \left(T_{a_i} \delta u_i ds - T_{ik} \delta u_i ds_k\right) \right\} = 0 \tag{2.42}$$

La variation δu_i étant arbitraire dans (V_0) et sur $\left(\partial V_{0_T}\right)$, on en déduit alors les équations traduisant l'équilibre dynamique du corps élastique :

$$\begin{cases} \rho_{m_0} \ddot{u}_i - \partial_k T_{ik} - F_{a_i} = 0 & \text{dans } (V_0) \\ T_{ik} n_k = T_{a_i} & \text{sur } \left(\partial V_{0_T}\right) \end{cases} \tag{2.43}$$

(n_k désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure à (V_0) ; $n_k ds = ds_k$).

Notons que ces équations linéarisées sont valables dans le cas d'un milieu subissant de petites déformations. Nous laissons le soin au lecteur d'établir, selon un raisonnement parfaitement similaire, les équations relatives au cas de déformations élastiques quelconques caractérisées par l'expression complète de S_{ik} incluant les termes du second ordre (cf. section 2.2.3).

2.3.4 Équations du champ électromagnétique

La nature profondément relativiste de l'électromagnétisme conduit tout naturellement à aborder la formulation variationnelle des lois régissant la dynamique du champ électromagnétique dans le cadre de l'espace à quatre dimensions [**36**]. L'action S pour le champ se définit alors comme l'intégrale d'une quantité scalaire Λ, appelée *densité de lagrangien*, selon une relation de la forme :

$$S = \frac{1}{c} \int_{(\Omega)} \Lambda d\omega \tag{2.44}$$

où le « volume » d'intégration Ω (à quatre dimensions) correspond à l'ensemble de l'espace tridimensionnel pris entre les instants initial (t_1) et final (t_2), $d\omega = cdt\, dx\, dy\, dz$ désignant l'élément différentiel de cet hypervolume.

Le formalisme lagrangien appliqué à la description d'un champ continu (nombre infini de degrés de liberté) conduit à considérer comme coordonnées généralisées (q^λ) les potentiels du champ regroupés dans le quadrivecteur $\mathcal{A}^\lambda$ (cf. section 2.1.1), tandis que le 4-gradient vectoriel $\partial^\lambda \mathcal{A}^\mu$ tient lieu de vitesse généralisée ($\dot{q}^\lambda$). La transposition des équations de Lagrange (2.34) au cas du champ continu impose alors à la densité de lagrangien Λ de satisfaire aux équations :

$$\partial^\lambda \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\partial^\lambda \mathcal{A}^\mu \right)} \right] - \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathcal{A}^\mu} = 0 \tag{2.45}$$

Considérant le cas général d'un champ électromagnétique dans lequel se meut un ensemble de particules chargées (sources libres), en présence de milieux matériels polarisés ou aimantés (sources liées), on peut postuler une densité lagrangienne de la forme :

$$\Lambda = -\frac{\mu_0}{4} \mathcal{G}_{\rho\sigma} \mathcal{G}^{\rho\sigma} - \mathcal{A}^\mu \mathcal{J}_\mu \tag{2.46}$$

où le tenseur du champ $\mathcal{G}^{\rho\sigma}$ tient compte, conformément aux définitions adoptées à la section 2.2.2, des termes de polarisation et d'aimantation regroupés dans le tenseur des moments $\mathcal{M}^{\lambda\mu}$. La fonction de Lagrange étant par définition un scalaire pur, il est naturel que ses termes soient construits par contraction de deux tenseurs du même rang (cf. A.3.2). Utilisant la relation (2.18), le développement de Λ donne :

$$\Lambda = -\frac{1}{4\mu_0} \left(\mathcal{F}_{\rho\sigma} + \mu_0 \mathcal{M}_{\rho\sigma} \right) \left(\mathcal{F}^{\rho\sigma} + \mu_0 \mathcal{M}^{\rho\sigma} \right) - \mathcal{A}^\mu \mathcal{J}_\mu \tag{2.47}$$

Ainsi, outre la densité lagrangienne du champ libre[1] (terme en $\mathcal{F}_{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\rho\sigma}$), l'expression de Λ traduit l'interaction du champ avec les sources liées d'une part (termes en $\mathcal{M}_{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\rho\sigma}$) et avec les sources libres d'autre part (terme $\mathcal{A}^\mu \mathcal{J}_\mu$). Exprimée en fonction du 4-potentiel grâce à (2.6), la densité de lagrangien associée au champ électromagnétique s'écrit finalement :

$$\Lambda = -\frac{1}{4\mu_0} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \left(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta - \partial^\beta \mathcal{A}^\alpha + \mu_0 \mathcal{M}^{\alpha\beta} \right) \left(\partial^\rho \mathcal{A}^\sigma - \partial^\sigma \mathcal{A}^\rho + \mu_0 \mathcal{M}^{\rho\sigma} \right) - \mathcal{A}^\mu \mathcal{J}_\mu \tag{2.48}$$

Il convient dès lors, pour établir les équations différentielles gouvernant le champ à partir du principe de moindre action, d'annuler la variation de l'intégrale (2.44) portant sur la densité Λ ainsi exprimée (on devra toutefois prendre soin de ne pas varier le tenseur des moments et le 4-vecteur courant qui correspondent tous deux à des sources données dont la dynamique est de ce fait imposée). On peut également

(1) On vérifiera, en substituant les composantes de $\mathcal{F}^{\rho\sigma}$ données par (2.4), que la densité lagrangienne du champ libre correspond à la différence des termes d'énergie volumique ($B^2/2\mu_0$) et ($\epsilon_0 E^2/2$) du champ dans le vide. Ainsi, en accord avec la définition générale du lagrangien, l'expression de Λ prend la forme d'une différence entre les termes d'énergie cinétique généralisée liés au mouvement des charges (énergie « magnétostatique ») et les termes d'énergie potentielle généralisée rendant compte de leur interaction « statique » (énergie « électrostatique »).

déduire directement les équations du champ des équations de Lagrange écrites sous la forme (2.45). Évaluons à cette fin les dérivées partielles de Λ par rapport aux coordonnées et vitesses généralisées. Il vient tout d'abord :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\partial^\lambda \mathcal{A}^\mu\right)} = -\frac{1}{4} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma}\left(\delta_\lambda{}^\alpha \delta_\mu{}^\beta \mathcal{G}^{\rho\sigma} - \delta_\lambda{}^\beta \delta_\mu{}^\alpha \mathcal{G}^{\rho\sigma} + \delta_\lambda{}^\rho \delta_\mu{}^\sigma \mathcal{G}^{\alpha\beta} - \delta_\lambda{}^\sigma \delta_\mu{}^\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta}\right) \tag{2.49}$$

ce qui se réduit, en vertu de la symétrie du tenseur métrique et du caractère antisymétrique de $\mathcal{G}^{\lambda\mu}$, à l'identité :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\partial^\lambda \mathcal{A}^\mu\right)} = \mathcal{G}_{\mu\lambda} \tag{2.50}$$

D'autre part, on a de manière évidente :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A^\mu} = -\mathcal{J}_\mu \tag{2.51}$$

Par conséquent, l'équation (2.45) s'écrira simplement (en remarquant que

$$g^{\mu\rho}\partial^\lambda G_{\mu\lambda} = \partial_\lambda G^{\rho\lambda} = -\partial_\lambda G^{\lambda\rho}) \;:$$

$$\partial_\lambda \mathcal{G}^{\lambda\mu} = \mathcal{J}^\mu \tag{2.52}$$

C'est l'équation qui régit la dynamique du champ électromagnétique en fonction des sources en présence de milieux matériels. Exprimée en fonction du tenseur $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ à l'aide de (2.18), cette équation se met aussi sous la forme :

$$\partial_\lambda \mathcal{F}^{\lambda\mu} = \mu_0\left(\mathcal{J}^\mu + \partial_\lambda \mathcal{M}^{\mu\lambda}\right) \tag{2.53}$$

faisant ainsi apparaître le 4-vecteur courant total $\mathcal{J}_T^\mu = \mathcal{J}^\mu + \partial_\lambda \mathcal{M}^{\mu\lambda}$ dans lequel figurent conjointement les sources libres et liées(1). D'autre part, on déduit immédiatement de (2.52) la condition :

$$\partial_\lambda \partial_\mu \mathcal{G}^{\lambda\mu} = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\mathbf{j} = 0 \tag{2.54}$$

(l'action de l'opérateur symétrique $\partial_\lambda \partial_\mu$ sur le tenseur antisymétrique $\mathcal{G}^{\lambda\mu}$ produit une somme nulle).

Cette condition n'est autre que l'équation de continuité exprimant la conservation de la charge électrique.

Dès lors, transcrite à l'aide des composantes « tridimensionnelles » de $\mathcal{G}^{\lambda\mu}$ et $\mathcal{J}^\mu$, l'équation (2.52) apparaît comme une formulation particulièrement concise de la deuxième paire des équations de Maxwell (équations homogènes). On montre en

(1) L'équation (2.52) aurait aussi pu être obtenue en postulant une densité lagrangienne de la forme :

$$\Lambda = -\frac{1}{4\mu_0}\mathcal{F}_{\lambda\mu}\mathcal{F}^{\lambda\mu} - \mathcal{A}_\mu \mathcal{J}_T^\mu .$$

effet sans difficulté, à partir des matrices de définition de ces quantités (cf. annexes A.2.6 et A.3.6) et des relations tensorielles définissant les principaux opérateurs différentiels de l'analyse vectorielle (voir annexe A.6), que (2.52) se ramène aux deux équations vectorielles rassemblées dans la colonne (a) du tableau 2.2 (la condition sur la divergence se déduit de (2.52) en faisant $\mu = 0$, tandis que le rotationnel résulte du regroupement des 3 équations relatives aux indices $\mu = 1, 2, 3$).

Par ailleurs, le champ ayant été défini comme le 4-rotationnel du potentiel, il satisfait nécessairement à la condition :

$$\partial_\rho \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\rho\lambda} + \partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\rho} = 0 \tag{2.55}$$

(pour s'en convaincre, il suffit d'exprimer $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$ en fonction du potentiel à l'aide de (2.6) et d'additionner les 6 termes obtenus, en tirant parti du fait que les dérivées seconde commutent).

En raison du caractère antisymétrique de $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$, cette condition se révèle triviale si deux au moins des indices sont égaux. Le cas non-trivial, pour lequel les 3 indices ρ, λ, μ sont tous différents (chacun variant de 1 à 4), fournit dès lors 4 équations indépendantes. On peut avantageusement en condenser l'écriture en utilisant le symbole d'antisymétrie $\epsilon^{\lambda\mu\rho\sigma}$ défini en annexe A.3.6. La condition (2.55) devient ainsi :

$$\epsilon^{\lambda\mu\rho\sigma} \partial_\mu \mathcal{F}_{\rho\sigma} = \partial_\mu \left(\epsilon^{\lambda\mu\rho\sigma} \mathcal{F}_{\rho\sigma} \right) = 0 \tag{2.56}$$

Fomulée à l'aide du tenseur antisymétrique adjoint $\mathcal{F}_*^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\rho\sigma} \mathcal{F}_{\rho\sigma}$ (dont la matrice est donnée dans le tableau (.1) de l'annexe A.3.6), on aboutit alors à une nouvelle équation pour le champ donnée par :

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_*^{\lambda\mu} = 0 \tag{2.57}$$

Cette équation, qui résulte exclusivement du fait que l'on a défini pour le champ des potentiels scalaire Φ et vecteur **A**, constitue la formulation tensorielle de la première paire des équations de Maxwell (équations homogènes) rappelées dans le tableau 2.2 (colonne (b)).

Enfin, un dernier jeu de relations particulièrement utile pour la détermination pratique du champ électromagnétique en fonction des sources correspond aux *équations aux potentiels*. Ces dernières peuvent être aisément établies à partir de (2.53) en exprimant le champ en fonction du 4-vecteur potentiel. Il vient en effet :

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \mathcal{A}^\mu - \partial_\lambda \partial^\mu \mathcal{A}^\lambda = \mu_0 \left(\mathcal{J}^\mu + \partial_\lambda \mathcal{M}^{\mu\lambda} \right) \tag{2.58}$$

Or, imposant au potentiel de satisfaire à la condition de jauge (2.11), le second terme au premier membre de l'équation disparaît. L'opérateur différentiel qui subsiste au premier membre n'est autre que le d'alembertien (cf. annexe A.7), si bien que l'équation obtenue s'écrira finalement :

$$\Box \mathcal{A}^\lambda = \mu_0 \left(\mathcal{J}^\lambda + \partial_\mu \mathcal{M}^{\lambda\mu} \right) \tag{2.59}$$

La formulation de cette équation en termes du potentiel scalaire électrique Φ et du potentiel vecteur magnétique **A** se traduit par les deux relations vectorielles rassemblées dans la colonne (c) du tableau 2.2. figurent au second membre de ces équations les densités de charge et de courants totales notées respectivement ρ_T et $\mathbf{j}_T$. Outre les charges et courants libres, ces quantités englobent les sources fictives de polarisation et d'aimantation, associées aux densités ρ_p et $\mathbf{j}_m$ définies par (2.13), ainsi qu'un terme $\dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ rendant compte, à l'échelle macroscopique, du courant de convection dû aux déplacement des charges liées lors d'une variation de polarisation (courants de polarisation).

Tableau 2.2 Équations générales du champ électromagnétique dans les milieux matériels

ÉQUATIONS TENSORIELLES			
	$\partial_\lambda \mathcal{G}^{\lambda\mu} = \mathcal{J}^\mu$	$\partial_\lambda \mathcal{F}_*^{\lambda\mu} = 0$	$\Box\, \mathcal{A}^\mu = \mu_0 \left(\mathcal{J}^\mu + \partial_\lambda \mathcal{M}^{\mu\lambda} \right)$
FORMULATIONS VECTORIELLES			
	(équations de Maxwell)		(équations aux potentiels)
$\mu = 0 \rightarrow$	div **D** $= \rho$	div **B** $= 0$	$\Box\, \Phi = \dfrac{\rho_T}{\epsilon_0}$ avec $\rho_T = \rho -$ div **P**
$\mu = 1, 2, 3 \rightarrow$	**rot H** $= \mathbf{j} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	**rot E** $= -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\Box\, \mathbf{A} = \mu_0\, \mathbf{j}_T$ avec $\mathbf{j}_T = \mathbf{j} + \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu_0}$**rot J**
	(a)	(b)	(c)

Les équations tensorielles rassemblées dans le tableau 2.2 constituent la formulation covariante des équations du champ. Elles expriment chacune l'égalité de deux quadrivecteurs (dont la signification est indépendante du système de référence choisi) et restent par conséquent invariantes dans tout changement de référentiel galiléen. En outre, si le système de coordonnées considéré jusqu'à présent est rectiligne, ces équations valent aussi pour un système de coordonnées curvilignes, à condition de remplacer l'opérateur de dérivation ∂_λ par le symbole de dérivation covariante ∇_λ (cf. annexe A.5.3).

2.3.5 Lois constitutives des milieux

Les équations générales établies au cours des paragraphes précédents gouvernent la dynamique des champs qui décrivent l'état mécanique et électromagnétique des milieux continus. La résolution de ces équations face à un problème particulier nécessite cependant, outre la connaissance des excitations extérieures et des conditions aux limites, de disposer des *lois de comportement* caractéristiques des propriétés des milieux en présence. Ces lois de comportement, ou *relations constitutives*, établissent un lien direct entre les composantes de certains vecteurs ou tenseurs représentatifs de l'état électro-magnéto-mécanique de la matière. Généralement déduites de l'expérience, ces relations résultent dans la plupart des cas d'une approximation et demeurent attachées à des conditions de mesure bien spécifiques (par exemple à température constante, dans un système de référence où la matière est au repos). La réalité physique qu'elles traduisent présente de ce fait un caractère relatif. Aussi, ces lois ne sauraient être confondues avec les liens fondamentaux qu'expriment les relations tensorielles covariantes établies pour certaines grandeurs physiques (telles que la relation (2.18)).

Dans le cas le plus simple, les propriétés de la matière se ramènent à une loi de comportement linéaire. Le tableau 2.3 rassemble les relations constitutives linéaires associées aux propriétés les plus couramment rencontrées dans les systèmes électromécaniques (milieux élastiques, diélectriques, magnétiques, conducteurs ou supraconducteurs(1)). La donnée d'une simple constante scalaire suffit alors à caractériser le milieu lorsque son comportement est *isotrope* vis à vis de la propriété étudiée (la réponse du milieu est dans ce cas indépendante de la direction dans laquelle il est sollicité).

En présence d'une *anisotropie*, la loi de comportement sera décrite à l'aide d'un tenseur dont les propriétés mathématiques sont étroitement liées aux *éléments de symétrie* de la structure considérée. Prenons à titre d'exemple le cas d'un milieu magnétique linéaire dont la structure cristalline possède un axe de symétrie d'ordre 2, c'est-à-dire qu'une rotation de π autour de cet axe fait coïncider le cristal avec lui-même. Le problème étant rapporté à un système de référence orthonormé, convenons pour

(1) L'état supraconducteur se caractérise, de manière générale, par une résistivité électrique nulle (conductivité infinie) en deça d'une certaine température critique Θ_C. Associée aux équations de Maxwell, la loi de comportement formulée dans le tableau 2.3 (théorie de London) permet ainsi de prévoir le phénomène d'expulsion du champ magnétique (effet Meissner) lors de la transition entre l'état normal et l'état supraconducteur [**7**]. Le champ **B** étant identiquement nul dans le volume du matériau (la profondeur de pénétration λ_S est de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres), le milieu est alors assimilable à un diamagnétique parfait ($\chi_m = -1$). Notons cependant que cette situation particulière suppose que l'intensité du champ appliqué soit inférieure à un certain niveau de champ critique de valeur très faible ($H < H_{C_1}$ pour un supraconducteur de seconde espèce tel que Nb_3S_n, composé pour lequel $H_{C_1} \approx 0,023\,T$). Dans les applications pratiques de la supraconductivité, on exploitera le plus souvent un *état mixte* ($H_{C_1} < H < H_{C_2}$) dans lequel un champ d'intensité significative ($H_{C_2} \approx 23\,T$ pour Nb_3S_n) peut pénétrer le milieu sans en détruire complètement les propriétés supraconductrices. Un champ baignant initialement le matériau pourra ainsi s'y trouver partiellement « piégé ». D'un point de vue comportemental, l'état mixte peut être décrit au moyen d'une loi combinant l'équation de London et la relation classique des milieux conducteurs (loi d'ohm).

fixer les idées que l'axe de symétrie coïncide avec l'axe Oz. La relation constitutive du milieu magnétique ($B_i = \mu_{ik} H_k$) doit rester invariante vis-à-vis de la rotation opérée (puisque la configuration physique de la matière s'en trouve inchangée). Or, au cours de la transformation, les composantes de **B** et **H** selon Ox et Oy changent de signe, tandis que les composantes selon Oz se conservent. Par conséquent, les constantes rendant compte d'un couplage magnétique entre les directions Ox ou Oy et la direction Oz sont nécessairement nulles ($\mu_{13} = \mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{32} = 0$). On en conclut que le tenseur de perméabilité d'un cristal possédant un axe de symétrie d'ordre 2 (selon l'axe Oz) doit a priori être représenté par une matrice de la forme :

$$\left[\mu_{ik}\right] = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

Tableau 2.3 Lois constitutives associées aux principaux types de milieux linéaires homogènes

Type de milieu	Relation constitutive (isotrope)	Relation constitutive (anisotrope)	Nom de la constante
élastique	$T_{ik} = 2\mu_L S_{ik} + \lambda_L \delta_{ik} S_{mm}$ (λ_L, μ_L : constantes de Lamé)	$T_{ik} = c_{iklm} S_{lm}$ $S_{ik} = s_{iklm} T_{lm}$	rigidité souplesse
diélectrique	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ $(\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e))$	$D_i = \epsilon_{ik} E_k$ $P_i = \epsilon_0 \chi_{e_{ik}} E_k$ $(\epsilon_{ik} = \epsilon_0 (\delta_{ik} + \chi_{e_{ik}}))$	permittivité, susceptibilité électriques
magnétique	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ $\mathbf{J} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}$ $(\mu = \mu_0 (1 + \chi_m))$	$B_i = \mu_{ik} H_k$ $J_i = \mu_0 \chi_{m_{ik}} H_k$ $(\mu_{ik} = \mu_0 (\delta_{ik} + \chi_{m_{ik}}))$	perméabilité, susceptibilité magnétiques
conducteur	$\mathbf{E} = \rho_e \mathbf{j}$ $\mathbf{j} = \sigma_e \mathbf{E}$	$E_i = \rho_{e_{ik}} j_k$ $j_i = \sigma_{e_{ik}} E_k$	résistivité, conductivité électriques
supraconducteur	$\dfrac{d\mathbf{j}}{dt} = \dfrac{1}{\mu_0 \lambda_s^2} \mathbf{E} \left(\text{ou } \mathbf{j} = -\dfrac{1}{\mu_0 \lambda_s^2} \mathbf{A} \right)$	(pour $\Theta < \Theta_c$ et $H < H_{c_1}$)	profondeur de pénétration

L'anisotropie de la matière joue également un rôle majeur dans l'interprétation des mécanismes de couplage entre des propriétés de différentes natures. Tel est le cas des couplages électro- ou magnéto-élastiques intervenant en piézoélectricité ou en magnétostriction (cf section 4.4), domaines pour lesquels les raisonnements sur la symétrie des tenseurs se révèlent très précieux.

Enfin, il convient de souligner que nombre des matériaux performants utilisés en électromécanique suivent une loi de comportement éminemment non-linéaire. L'*hystérèse* des matériaux ferromagnétiques ou ferroélectriques est particulièrement révélatrice de ce type de difficulté [**39**]. Néanmoins, face à des conditions d'exploitation bien déterminées (par exemple lorsque le point de fonctionnement ne décrit qu'une petite partie du cycle d'hystérésis), on pourra être amené à idéaliser ce type

de loi au moyen d'une caractéristique linéaire. La figure 2.4 illustre ce procédé dans sa logique la plus basique. Appliquée à un composé « doux » (à cycle étroit), l'approximation linéaire conduit ainsi au cas idéal d'un milieu perméable non-dispersif. La pente élevée de sa caractéristique le destinera préférentiellement à la canalisation ou au confinement du champ électromagnétique (circuit magnétique, diélectrique pour condensateurs). La linéarisation du comportement d'un matériau « dur » (à cycle large) produit quant à elle la caractéristique typique d'une source de champ idéale (aimant ou diélectrique possédant une polarisation rémanente).

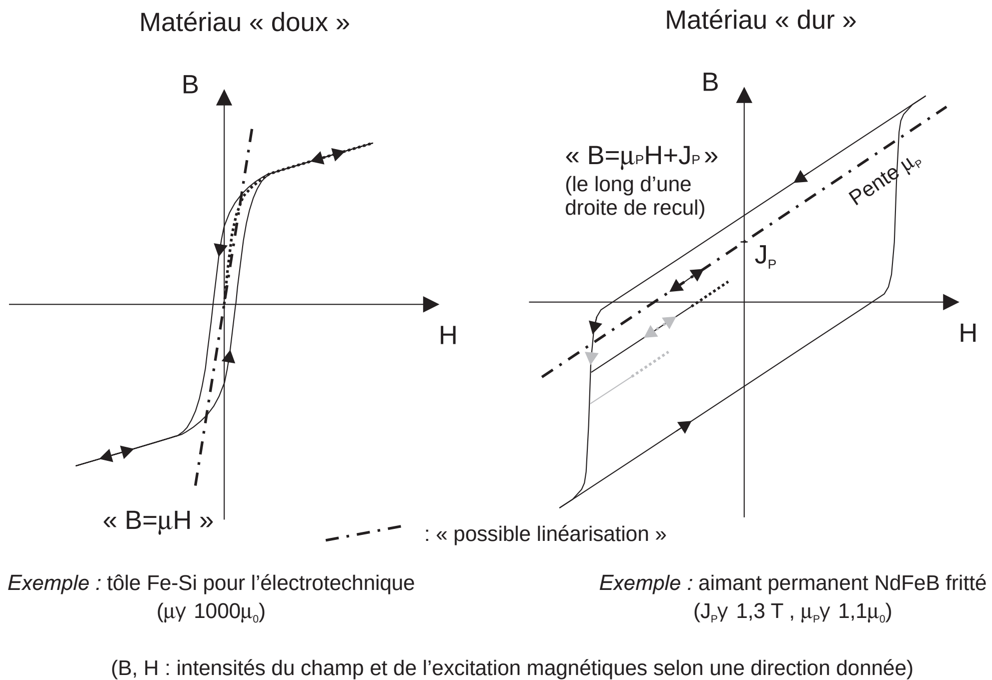


Figure 2.4 Loi de comportement des milieux ferromagnétiques (ou ferroélectriques en faisant $H \rightarrow E$, $B \rightarrow D$)

Notons enfin que la prise en compte des pertes engendrées dans les milieux déformables, diélectriques ou magnétiques constitue un problème théorique difficile. Face à un tel sujet, la description des phénomènes à l'échelle « macroscopique locale » se révèle généralement insuffisante. C'est ainsi que, dans la pratique, l'ingénieur aura souvent recours à des formules empiriques permettant d'estimer, de manière plus ou moins fiable, la puissance dissipée. Une théorie phénoménologique linéaire des milieux dispersifs peut néamoins être développée en remplaçant les constantes réelles du cas linéaire sans pertes (constantes d'élasticité, de permittivité ou de perméabilité) par des constantes à valeur complexe, fonctions de la fréquence d'excitation [**2**][**43**].

Lorsque l'on a affaire à un milieu excité en régime harmonique, on peut en effet remarquer que le phénomène d'hystérésis (terme qui signifie « retard ») a pour effet de déphaser le signal représentatif de la réponse du milieu (attachée par exemple à S_{ik}, D_i ou B_i) par rapport au signal d'excitation (respectivement liée à T_{ik}, E_i ou H_i). L'introduction de constantes complexes revient alors, pour une fréquence donnée, à assimiler le cycle à une boucle elliptique dont l'aire mesure directement l'énergie dissipée (par unité de volume) au cours d'un cycle de travail.

2.4 ÉNERGIES ET FORCES

Associées aux lois constititives des milieux, les équations rassemblées dans le tableau 2.2 suffisent en principe à déterminer la distribution spatio-temporelle du champ électromagnétique lorsque les sources qui lui donnent naissance sont connues. La dynamique couplée du champ et des sources requiert quant à elle l'adjonction d'une équation supplémentaire ayant trait à la loi d'interaction. Pour une particule élémentaire (de charge q_e), cette loi d'interaction n'est autre que l'expression de la force de Lorentz ($\mathbf{F} = q_e\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$). Dans le cas d'un système distribué, il s'agira plus généralement de s'intéresser à l'énergie contenue dans le champ, à la quantité de mouvement qu'il renferme et aux équations bilan qui en résultent.

2.4.1 Énergie et impulsion d'un système mécanique

Considérons tout d'abord le cas d'un système mécanique caractérisé par sa fonction de Lagrange L. Le système étant supposé isolé, le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps (cf. section 2.3.1), si bien que sa dérivée temporelle s'écrit :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^\lambda}\dot{q}^\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda}\ddot{q}^\lambda \tag{2.61}$$

Tenant compte des équations de Lagrange (2.34), il vient :

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}^\lambda \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda}\ddot{q}^\lambda = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^\lambda \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda}\right) \tag{2.62}$$

ou encore :

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}^\lambda \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} - L\right) = 0 \tag{2.63}$$

ce qui montre que la quantité entre parenthèses se conserve au cours du mouvement. Cette quantité représente l'*énergie totale* $\mathcal{E}$ du système, somme de ses énergies cinétique et potentielle. Il résulte en effet de la forme particulière du lagrangien pour un système conservatif ($L\,(q\,,\dot{q}) = \mathcal{E}_c\,(q\,,\dot{q}) - \mathcal{E}_p\,(q)$) l'identité :

$$\dot{q}^\lambda \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} = \dot{q}^\lambda \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{q}^\lambda} \tag{2.64}$$

Si, de plus, on admet que l'énergie cinétique est une fonction quadratique des vitesses, il vient immédiatement :

$$\dot{q}^{\lambda} \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{q}^{\lambda}} = 2\mathcal{E}_c \tag{2.65}$$

d'où finalement :

$$\mathcal{E} = \dot{q}^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\lambda}} - L = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \tag{2.66}$$

Ainsi, la conservation de l'énergie totale $\mathcal{E}$ du système constitue une donnée fondamentale de son évolution. On dit que l'énergie $\mathcal{E}$ est une *intégrale première du mouvement*.

Par ailleurs, en l'absence de force appliquée ($f_\lambda = \partial L / \partial q^\lambda = 0$), une conséquence directe des équations de Lagrange réside dans la conservation de la quantité $\partial L / \partial \dot{q}^\lambda$ égale à l'impulsion p_λ ($\dot{p}_\lambda = f_\lambda = 0$). Pour un système mécanique macroscopique, on peut toujours affecter trois de ses coordonnées généralisées aux trois coordonnées de son centre d'inertie. Les impulsions correspondantes s'identifient alors aux composantes de la quantité de mouvement totale **p** du système. Cette grandeur se conserve à l'évidence si le système est isolé (la somme des forces agissant sur l'ensemble des particules du système est nulle à tout instant). Comme l'énergie totale, l'impulsion apparaît dans ces conditions comme une autre intégrale première du mouvement.

On ne sera donc pas étonné que, en mécanique relativiste, ces deux quantités soient appréhendées au travers d'une seule et même grandeur physique, le quadrivecteur énergie-impulsion [**36**]. Énergie et quantité de mouvement en constituent respectivement les composantes temporelles et spatiales, tandis que les intégrales premières formulées en terme de ce quadrivecteur apparaissent comme la conséquence d'une seule et même loi de conservation.

2.4.2 Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le souligner, le champ électromagnétique constitue un objet physique à part entière de l'espace-temps. Dès lors, de même qu'il possède une densité d'énergie, on doit également pouvoir définir pour le champ une densité d'impulsion, l'ensemble de ces notions étant assujetti à une loi de conservation commune. Avant d'établir les équations bilan qui en résultent, il s'agit, dans un premier temps, de définir la grandeur regroupant l'énergie et l'impulsion du champ.

À cette fin, on peut procéder selon un raisonnement analogue à celui précédemment employé dans le cas d'un système mécanique. Le champ est caractérisé par une densité lagrangienne Λ et ses degrés de liberté sont assimilés aux composantes du 4-potentiels $\mathcal{A}^\lambda$ (cf. section 2.3.4). L'analogue de l'équation (2.61) s'écrit alors :

$$\partial^\mu \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathcal{A}^\alpha} \partial^\mu \mathcal{A}^\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right)} \partial^\mu \left(\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right) \tag{2.67}$$

ce qui donne, en tenant compte de l'équation (2.45) :

$$\partial^\mu \Lambda = \partial^\beta \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha} \right) \partial^\mu \mathcal{A}^\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right)} \partial^\mu \partial^\beta \mathcal{A}^\alpha = \partial^\beta \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right)} \partial^\mu \mathcal{A}^\alpha \right) \tag{2.68}$$

Remarquons que le premier membre de cette relation s'écrit aussi :

$$\partial^\mu \Lambda = \delta^\mu_\beta \partial^\beta \Lambda = \partial^\beta \delta^\mu_\beta \Lambda \tag{2.69}$$

Par ailleurs, le champ étant ici considéré en l'absence de toutes sources libres ou liées (champ libre), la densité Λ exprimée par (2.46) se réduit à la contraction du tenseur de champ $\mathcal{F}_{\rho\sigma}$ avec lui-même :

$$\Lambda = -\frac{1}{4\mu_0} \mathcal{F}_{\rho\sigma} \mathcal{F}^{\rho\sigma} \tag{2.70}$$

De même, à l'aide de (2.50), la dérivée de Λ par rapport aux termes de vitesses généralisées $\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha$ s'exprime en fonction du tenseur du champ par :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right)} = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \tag{2.71}$$

Par conséquent, l'équation initiale se met finalement sous la forme :

$$\partial^\beta \Theta_\beta{}^\mu = 0 \tag{2.72}$$

avec :

$$\Theta_\beta{}^\mu = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{F}_{\alpha\beta}\, \partial^\mu \mathcal{A}^\alpha + \frac{1}{4\mu_0} \delta^\mu_\beta \mathcal{F}_{\rho\sigma} \mathcal{F}^{\rho\sigma} \tag{2.73}$$

ou encore, pour les composantes contravariantes du tenseur ainsi défini :

$$\Theta^{\lambda\mu} = g^{\lambda\beta} \Theta_\beta{}^\mu = -\frac{1}{\mu_0} g^{\lambda\beta} \mathcal{F}_{\beta\alpha}\, \partial^\mu \mathcal{A}^\alpha + \frac{1}{4\mu_0} g^{\lambda\mu} \mathcal{F}_{\rho\sigma} \mathcal{F}^{\rho\sigma} \tag{2.74}$$

L'équation (2.72) montre qu'il existe pour le champ une quantité tensorielle du deuxième ordre dont la divergence est identiquement nulle. Ainsi, de même que le flux d'un vecteur de l'espace tridimensionnel dont la divergence est nulle se conserve, l'équation (2.72) exprime le caractère conservatif de l'intégrale $\int \Theta_\beta{}^\mu d\sigma_\beta$ prise sur une hypersurface fermée de l'espace-temps (cf. section A.6.8). Cette intégrale forme un quadrivecteur qui correspond (à une constante près) à la *4-impulsion* du champ électromagnétique.

Notons par ailleurs que la définition de $\Theta^{\lambda\mu}$ n'est pas univoque, en ce sens que l'équation (2.72) est encore satisfaite si l'on ajoute à $\Theta^{\lambda\mu}$ un terme de la forme $\partial^\alpha \psi^\lambda{}_\alpha{}^\mu$ tel que $\psi^\lambda{}_\alpha{}^\mu = -\psi_\alpha{}^{\lambda\mu}$ auquel cas on voit immédiatement que :

$$\partial_\lambda \partial^\alpha \psi^\lambda{}_\alpha{}^\mu = -\partial_\lambda \partial^\alpha \psi_\alpha{}^{\lambda\mu} = -\partial^\lambda \partial_\alpha \psi^\alpha{}_\lambda{}^\mu = 0.$$

Le terme $\dfrac{1}{\mu_0} g^{\lambda\beta} \mathcal{F}_{\beta\alpha}\, \partial^\alpha \mathcal{A}^\mu$ satisfait précisément à cette condition(1). Ajouté à l'expression de $\Theta^{\lambda\mu}$, il permet d'en symétriser la forme en faisant apparaître le tenseur du champ ($\mathcal{F}^{\alpha\mu} = \partial^\alpha \mathcal{A}^\mu - \partial^\mu \mathcal{A}^\alpha$). On aboutit ainsi à la formulation symétrique du *tenseur énergie-impulsion* du champ électromagnétique définie par :

$$\Theta^{\lambda\mu}_{(S)} = \frac{1}{\mu_0}\left(g^{\lambda\beta} \mathcal{F}_{\beta\alpha} \mathcal{F}^{\alpha\mu} + \frac{1}{4} g^{\lambda\mu} \mathcal{F}_{\rho\sigma} \mathcal{F}^{\rho\sigma} \right) \tag{2.75}$$

2.4.3 Composantes du tenseur énergie-impulsion symétrique

Afin de dégager la signification physique des composantes du tenseur énergie-impulsion tel que défini sous sa forme symétrique par (2.75), il convient au préalable d'en expliciter les différents termes à l'aide des matrices représentant le tenseur de champ et le tenseur fondamental (cf. annexe A.2.6 et A.3.6).

Le calcul du premier terme de la diagonale donne tout d'abord :

$$\Theta^{00}_{(S)} = \frac{1}{\mu_0}\left(g^{00} \mathcal{F}_{0i} \mathcal{F}^{i0} + \frac{1}{4} g^{00} \mathcal{F}_{\rho\sigma} \mathcal{F}^{\rho\sigma} \right) = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) \right] \tag{2.76}$$

Ce terme s'identifie à la densité d'énergie du champ électromagnétique :

$$\Theta^{00}_{(S)} = U_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{2.77}$$

S'agissant des composantes spatio-temporelles, on a d'autre part :

$$\Theta^{0i}_{(S)} = \Theta^{i0}_{(S)} = \frac{1}{\mu_0}\left(g^{00} \mathcal{F}_{0k} \mathcal{F}^{ki} \right) \tag{2.78}$$

ce qui s'écrit, après subsitution des composantes du champ et regroupement des trois relations obtenues ($i = 1, 2, 3$) :

$$\Theta^{0i}_{(S)} = \frac{\Pi}{c} \tag{2.79}$$

où Π désigne un vecteur de l'espace à trois dimensions appelé *vecteur de Poynting* et défini par :

$$\Pi = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \right) \tag{2.80}$$

(1) Pour s'en convaincre, il suffit de développer l'expression $\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^\lambda{}_\alpha A^\mu \right) = g^{\lambda\beta} \partial^\alpha \left(\mathcal{F}_{\beta\alpha} \mathcal{A}^\mu \right)$ en remarquant que le terme $\mathcal{A}^\mu\, \partial^\alpha \mathcal{F}_{\beta\alpha}$ est nul du fait de l'équation (2.53) en l'absence de sources.

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'intégration de $\Theta^{\lambda\mu}_{(S)}$ sur une hypersurface de l'espace-temps forme la 4-impulsion du système. Si cette hypersurface (de dimension 3) coïncide avec l'hyperplan orthogonal à l'axe des temps (élément d'aire $d\sigma_0$), l'intégration est alors étendue à tout l'espace tridimensionnel selon un terme générique de la forme $\int \Theta^{0\mu}_{(S)} dv$. L'intégrale portant sur la composante temporelle $\Theta^{00}_{(S)}$ n'est autre que l'énergie contenue dans le champ. L'équation (2.72) assure par conséquent la conservation de cette énergie au cours du temps. Quant à l'intégrale portant sur les composantes spatio-temporelles $\Theta^{0i}_{(S)}$, elle peut être interprétée comme la quantité de mouvement totale contenue dans le champ libre (en l'absence de sources). Le vecteur de Poynting apparaît ainsi comme la densité d'impulsion du champ électromagnétique (à une constante près). En vertu de la même équation (2.72), l'impulsion du champ se trouve également conservée.

En ce qui concerne enfin les composantes spatiales de $\Theta^{\lambda\mu}_{(S)}$, elles s'expriment de manière générale par :

$$\begin{aligned} \Theta^{ik}_{(S)} &= \frac{1}{\mu_0}\left(g^{i\beta}\mathcal{F}_{\beta\alpha}\mathcal{F}^{\alpha k} + \frac{1}{4}g^{ik}\mathcal{F}_{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\rho\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\left[\mathcal{F}^i{}_0\mathcal{F}^{0k} + \mathcal{F}^i{}_l\mathcal{F}^{lk} + \frac{1}{2}\delta^{ik}\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)\right] \end{aligned} \tag{2.81}$$

Remarquant que[(1)] :

$$\mathcal{F}^i{}_0\mathcal{F}^{0k} = -\frac{1}{c^2}E_i E_k \tag{2.82}$$

et que :

$$\mathcal{F}^i{}_l\mathcal{F}^{lk} = -B_i B_k + \delta^{ik}B^2 \tag{2.83}$$

il apparaît que les composantes $\Theta^{ik}_{(S)}$ forment, au signe près, un tenseur de l'espace tridimensionnel appelé *tenseur des contraintes de Maxwell*. Son expression est donnée par la formule :

$$T^{(M)}_{ik} = \left[\epsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0}B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\right] \tag{2.84}$$

On verra plus loin que cette quantité rend compte du flux d'impulsion d'origine électromagnétique entrant dans le volume considéré par unité de temps. À l'instar du tenseur des contraintes de la mécanique, cette grandeur a donc la dimension d'une force par unité de surface.

(1) On rappelle qu'il n'y a pas lieu de distinguer les composantes contravariantes et covariantes des vecteurs de l'espace à trois dimensions puisque ce dernier est ici rapporté à un repère orthonormé.

Dès lors, le tenseur énergie-impulsion symétrique du champ électromagnétique se présente finalement sous la forme du tableau :

$$\Theta^{\lambda\mu}_{(S)} = \begin{pmatrix} U_{em} & \dfrac{\Pi_x}{c} & \dfrac{\Pi_y}{c} & \dfrac{\Pi_z}{c} \\ \dfrac{\Pi_x}{c} & -T^{(M)}_{xx} & -T^{(M)}_{xy} & -T^{(M)}_{xz} \\ \dfrac{\Pi_y}{c} & -T^{(M)}_{xy} & -T^{(M)}_{yy} & -T^{(M)}_{yz} \\ \dfrac{\Pi_z}{c} & -T^{(M)}_{xz} & -T^{(M)}_{yz} & -T^{(M)}_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

2.4.4 Équation de conservation en présence de sources

Dans le cas où des sources libres ou liées interagissent avec le champ électromagnétique, la divergence du tenseur énergie-impulsion n'est plus nulle (l'équation (2.72) n'est plus vérifiée). La conservation de la 4-impulsion reste vraie à condition toutefois de tenir compte de la contribution des sources agissant dans le champ. En vue d'établir les bilans d'énergie et d'impulsion correspondants, il s'agit donc de calculer la divergence de $\Theta^{\lambda\mu}_{(S)}$ en présence de sources extérieures et de milieux matériels. Exprimée à partir de (2.75), cette divergence s'écrit :

$$\partial_\lambda \Theta^{\lambda\mu}_{(S)} = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathcal{F}^{\alpha\mu}\partial^\beta \mathcal{F}_{\beta\alpha} + \mathcal{F}_{\beta\alpha}\partial^\beta \mathcal{F}^{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\rho\sigma}\partial^\mu \mathcal{F}^{\rho\sigma}\right) \tag{2.86}$$

Le premier terme au second membre peut être transformé à l'aide de l'équation inhomogène (2.53), ce qui donne :

$$\mathcal{F}^{\alpha\mu}\partial^\beta \mathcal{F}_{\beta\alpha} = \mu_0 \mathcal{F}^{\alpha\mu}\mathcal{J}^T_\alpha \tag{2.87}$$

Quant aux deux termes suivants, on peut les réécrire en utilisant l'équation homogène exprimée sous la forme (2.55). Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\beta\alpha}\partial^\beta \mathcal{F}^{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\rho\sigma}\partial^\mu \mathcal{F}^{\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\beta\alpha}\left(\partial^\beta \mathcal{F}^{\alpha\mu} + \partial^\beta \mathcal{F}^{\alpha\mu} + \partial^\mu \mathcal{F}^{\beta\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\beta\alpha}\left(\partial^\beta \mathcal{F}^{\alpha\mu} + \partial^\alpha \mathcal{F}^{\beta\mu}\right) \end{aligned} \tag{2.88}$$

Or, le terme entre parenthèses étant symétrique en α,β, sa contraction avec le tenseur antisymétrique $\mathcal{F}_{\beta\alpha}$ produit une somme nulle. Par conséquent, la divergence du tenseur énergie-impulsion est donnée dans le cas général par :

$$\partial_\lambda \Theta^{\lambda\mu}_{(S)} = \mu_0 \mathcal{F}^{\alpha\mu}\mathcal{J}^T_\alpha \tag{2.89}$$

Cette nouvelle équation condense en une formulation manifestement covariante les lois de conservation auxquelles satisfait le système formé par le champ électromagnétique, les sources et les milieux matériels avec lesquels il interagit. Pour en expliciter pleinement la signification, il convient d'écrire séparément les équations

relatives aux indices temporels ($\mu = 0$) et spatiaux ($\mu = 1, 2, 3$) de (2.89). Ces équations établissent respectivement les bilans d'énergie et d'impulsion du champ électromagnétique dans le cas général.

2.4.5 Équation bilan de l'énergie

Le courant total $\mathcal{J}_T^\alpha = (c\rho_T, \mathbf{j}_T)$ regroupe en une même entité quadrivectorielle l'ensemble des sources libres ou liées (y compris le courant de polarisation) intervenant dans le champ. Écrit sous sa forme covariante, ce 4-vecteur s'exprime ainsi par (cf. tableau 2.2) :

$$\mathcal{J}_\alpha^T = (c\rho_T, -\mathbf{j}_T) = \left(c\rho - c\,\mathrm{div}\mathbf{P}, -\mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot\,J}\right) \tag{2.90}$$

Dès lors, l'équation (2.89) fournit pour sa partie temporelle ($\mu = 0$), en y substituant les composantes correspondantes du tenseur énergie-impulsion ($\Theta_{(S)}^{\lambda i}$) et du tenseur de champ ($\mathcal{F}^{i0}$) données respectivement par (2.85) et (2.4) :

$$\frac{\partial U_{\mathrm{em}}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\Pi = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot\mathbf{rot\,J} \tag{2.91}$$

Après quelques manipulations élémentaires visant à substituer les termes de polarisation électrique **P** et magnétique **J** par les champs de déplacement électrique **D** et d'excitation magnétique **H** à l'aide de (2.16) et (2.17), on aboutit finalement à l'équation exprimant la conservation de l'énergie à l'échelle macroscopique locale :

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}) = 0 \tag{2.92}$$

Étendue à un domaine de volume (V) délimité par la surface (∂V), l'intégration de ces différents termes fournit alors le bilan énergétique global :

$$\underbrace{\int_{(V)} \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dv}_{(1)} + \underbrace{\int_{(V)} \left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) dv}_{(2)} = \underbrace{-\int_{(\partial V)} (\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})\cdot\mathbf{ds}}_{(3)} \tag{2.93}$$

chacune des intégrales pouvant être interprétée comme :

(1) la puissance cédée par le champ aux charges libres, rendant compte de la puissance fournie par les générateurs et de la puissance convertie dans le champ sous forme de travail mécanique, de chaleur, etc.

(2) la dérivée par rapport au temps de l'énergie électromagnétique stockée dans le champ, augmentée de l'énergie nécessaire à la polarisation des milieux matériels ;

(3) l'énergie entrant dans le volume (V) par unité de temps, exprimée comme le flux à travers la surface (∂V) du vecteur $(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})$ définissant le vecteur de Poynting dans la matière.

2.4.6 Bilan d'impulsion - Forces dans le champ électromagnétique

L'équation de conservation (2.89) se formule quant à sa partie spatiale ($\mu = 1, 2, 3$) par :

$$\partial_\lambda \Theta^{\lambda i}_{(S)} = \mu_0 \mathcal{F}^{\alpha i} \mathcal{J}^T_\alpha \tag{2.94}$$

Le regroupement des trois relations qui en résultent ($i = 1, 2, 3$), transcrites en fonction des composantes des tenseurs $\Theta^{\lambda\mu}_{(S)}$, $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ et du vecteur $\mathcal{J}^T_\alpha$, conduit alors au bilan local d'impulsion :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Pi_i}{c^2}\right) + \rho_T E_i + (\mathbf{j}_T \wedge \mathbf{E})_i = \partial_k T^{(M)}_{ik} \tag{2.95}$$

Étendu à un volume (V) d'enveloppe (∂V), ce bilan (vectoriel) s'écrira finalement :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{(V)} \frac{\Pi_i}{c^2} dv}_{(1)} + \underbrace{\int_{(V)} \left[\rho_T E_i + (\mathbf{j}_T \wedge \mathbf{E})_i\right] dv}_{(2)} = \underbrace{\int_{(\partial V)} T^{(M)}_{ik} ds_k}_{(3)} \tag{2.96}$$

Ces différents termes s'interprètent comme :

(1) la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement totale contenue dans le champ électromagnétique (le vecteur $\Pi/c^2 = \epsilon_0 (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$ représente la densité volumique de l'impulsion du champ) ;

(2) la variation temporelle de la quantité de mouvement des particules matérielles contenues dans (V) ;

(3) la quantité de mouvement entrant dans le volume (V) au travers de son enveloppe (∂V) durant l'unité de temps.

Ayant la dimension d'une force, ce dernier terme joue par conséquent un rôle majeur dans la détermination des actions mécaniques exercées par le champ sur les corps macroscopiques. Ainsi, dans le cas d'un solide indéformable supportant des sources électromagnétiques, le calcul des efforts subis par le corps, lorsqu'il est plongé dans un champ supposé connu, pourra être mené en intégrant le tenseur de Maxwell $T^{(M)}_{ik}$ sur une surface enveloppe entourant l'objet considéré. Il est évidemment entendu que, le corps étant indéformable, seul le torseur global de ces actions (force résultante et moment du couple) possède une signification physique pleinement établie. L'accès à la distribution des efforts locaux (contraintes) et aux déformations d'origine électromagnétique qu'elles engendrent requiert quant à lui la résolution du problème électro-magnéto-élastique couplé.

Afin d'illustrer le sens concret du tenseur des contraintes de Maxwell défini par l'expression (2.84), le tableau 2.4 décrit les efforts élémentaires résultant de différentes configurations du champ (électrique ou magnétique).

Tableau 2.4 Force élémentaire d'origine électromagnétique s'exerçant sur un élément de surface pour différentes configurations du champ (électrique ou magnétique)

Force « attractive »	Force « répulsive »	Force « tangentielle »
ligne de champ normale $\mathbf{X} = X_0 \mathbf{e}_y$ ($\mathbf{X}$: $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{B}$)	ligne de champ tangente $\mathbf{X} = X_0 \mathbf{e}_x$	ligne de champ oblique (à 45°) $\mathbf{X} = X_0/\sqrt{2}\ (\mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y)$
$\left\{ \begin{array}{l} T_{xy}^{(M)} = 0 \\ T_{yy}^{(M)} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \text{ ou } \frac{B_0^2}{2\mu_0} \\ T_{zy}^{(M)} = 0 \end{array} \right.$ $\mathbf{df} = \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \text{ ou } \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{e}_y ds$	$\left\{ \begin{array}{l} T_{xy}^{(M)} = 0 \\ T_{yy}^{(M)} = -\left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \text{ ou } \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \\ T_{zy}^{(M)} = 0 \end{array} \right.$ $\mathbf{df} = -\left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \text{ ou } \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{e}_y ds$	$\left\{ \begin{array}{l} T_{xy}^{(M)} = \pm \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \text{ ou } \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \\ T_{yy}^{(M)} = 0 \\ T_{zy}^{(M)} = 0 \end{array} \right.$ $\mathbf{df} = \pm \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \text{ ou } \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{e}_x ds$

$$\left(T_{ik}^{(M)} = \left[\epsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0} B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \right] \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} df_i = T_{ik}^{(M)} ds_k \\ \mathbf{ds} = \mathbf{e}_y ds \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{df} = \left(T_{xy}^{(M)} \mathbf{e}_x + T_{yy}^{(M)} \mathbf{e}_y + T_{zy}^{(M)} \mathbf{e}_z \right) ds$$

Chapitre 3

Le point de vue thermodynamique

Les systèmes électromécaniques opérationnels renferment généralement un nombre considérable de particules et de sources élémentaires. Aussi, il serait illusoire de chercher à décrire leur comportement à partir d'une approche purement déterministe, fondée sur la résolution directe des équations locales gouvernant la dynamique couplée de l'ensemble des particules mises en jeu. Rappelons d'ailleurs que la plupart des champs introduits au chapitre précédent représentent déjà des moyennes macroscopiques. Ainsi, en complément des lois locales constituant le modèle physique, il convient parallèlement de décrire les conditions globales du tranfert d'énergie réalisé, sans nécessairement en expliciter les causes microscopiques. Tel est précisément le propos de la thermodynamique [**44**][**46**].

Après en avoir brièvement rappelé les principaux postulats et hypothèses, le formalisme générique de la thermodynamique est appliqué au cas des systèmes macroscopiques subissant une transformation d'ordre électro-magnéto-mécanique. Les conséquences de ses deux premiers principes sont alors examinées dans le contexte particulier de l'électromécanique. La question importante des systèmes à l'équilibre quasi-statique donne lieu, au travers de la méthode des potentiels, à l'élaboration d'une formulation générale permettant le calcul systématique des forces. Une introduction à la dynamique des systèmes électromécaniques (à constantes localisées) est proposée en fin de chapitre.

3.1 POSTULATS DE LA THERMODYNAMIQUE

Les objets électromécaniques étudiés sont des systèmes macroscopiques fermés (i.e. qui n'échangent pas de matière avec le milieu extérieur) capables d'assurer un transfert d'énergie entre des sources de nature électromagnétique, mécanique ou thermique.
Ce transfert suppose la mise en jeu d'un ou plusieurs phénomènes d'interaction électro-magnéto-mécanique. Dans le contexte de la thermodynamique classique, un tel système est caractérisé par un ensemble de *paramètres macroscopiques* de natures scalaire, vectorielle ou tensorielle. Les paramètres macroscopiques *externes*, ou paramètres observables, sont directement déterminés par la position, au sens large, des corps extérieurs (volume, allongement, charge électrique). Les paramètres *internes*(1) sont liés à la position et au mouvement des sous-ensembles constituant le système (pression, énergie, aimantation). Les paramètres internes sont dits *intensifs* lorsqu'ils sont indépendant de la quantité de matière ou de particules mises en jeu (température, champ électrique, etc.). Ils sont qualifiés d'*extensifs* (additifs) dans le cas contraire (énergie, quantité de mouvement, etc.).

L'*état du système*, c'est à dire la forme de son existence, est défini par l'ensemble des paramètres macroscopiques indépendants. Les grandeurs qui sont indépendantes de l'évolution antérieure du système, et donc entièrement déterminées par son état à un instant donné, sont appelées *fonction d'état*. L'état d'*équilibre thermodynamique* correspond à un état stationnaire (les paramètres du système ne varient plus avec le temps) tel que, en outre, aucun flux d'énergie stationnaire ne subsiste sous l'action d'une source extérieure quelconque. En vertu du *premier postulat de la thermodynamique*, tout système isolé passe nécessairement par un tel état et ne peut le quitter spontanément. Écarté de cet état d'équilibre, le système y revient au bout d'un temps appelé temps de relaxation.

Le *deuxième postulat de la thermodynamique* stipule que, à l'équilibre thermodynamique, tous les paramètres internes sont fonction des paramètres externes et de la température. L'état instantané peut alors être complètement caractérisé par un nombre minimal de paramètres indépendants appelés *paramètres d'état*. Les paramètres externes étant définis par la position des corps extérieurs, les grandeurs d'état associées à l'équilibre thermodynamique excluent les paramètres de vitesse dont la définition repose sur la connaissance de la position du système à deux instants différents.

La variation au cours du temps de certains paramètres est le signe que le système subit une *transformation*. Lorsqu'une transformation est constituée d'une suite continue d'états d'équilibre, elle est dite *quasi-statique* ou équilibrée. Les paramètres

(1) En fonction des conditions particulières d'exploitation du système (telle ou telle variable peut-être imposée durant son fonctionnement), une même grandeur physique pourra tantôt jouer le rôle d'un paramètre externe ou tantôt celui d'un paramètre interne.

varient alors de manière infiniment lente par rapport à leur vitesse moyenne de variation lors de la relaxation. Soulignons que les transformations quasi-statiques sont nécessairement des transformations *réversibles*, c'est-à-dire des processus constitués d'une suite d'état d'équilibre dont le sens d'évolution peut être renversé à tout instant à partir d'une action infiniment petite sur les paramètres externes. En effet, l'état du système étant défini à chaque instant par la température et les paramètres externes (deuxième postulat), une variation infinitésimale opérée sur ces derniers en sens inverse du sens de la transformation directe permettra de revenir à l'état initial sans modification des corps extérieurs.

Dans le cas où le système possède une énergie cinétique macroscopique, ce qui est généralement le cas des objets électromécaniques étudiés, les transformations qu'il subit ne peuvent être réversibles puisque la notion d'état d'équilibre thermodynamique suppose le repos mécanique. Néanmoins, une décomposition judicieuse du système peut permettre d'isoler des sous-ensembles macroscopiques (éventuellement des volumes élémentaires) qui sont chacun au repos dans un référentiel convenablement choisi. Ces éléments sont par conséquent à même de subir une transformation réversible dans ces référentiels (notion d'*état local*). De telles transformations sont dites *idéales*. Elles permettent par exemple de caractériser l'interaction réversible susceptible de s'opérer entre un champ et un moment magnétique tournant au synchronisme.

Remarquons toutefois que les transformations réelles sont toujours irréversibles en raison de l'existence de *phénomènes dissipatifs* tels que le frottement, l'effet Joule, l'hystérèse magnétique, etc. L'échange d'énergie associé est de toute évidence irréversible. Dans le cas des phénomènes dissipatifs à caractère hystérétique, comme le frottement solide par exemple, cette irréversibilité demeure même lorsque l'on considère des transformations limites infiniment lentes. Les forces dissipatives ont des valeurs non-infiniment petites qui s'inversent avec la vitesse. Les travaux correspondants, qui ne changent pas de signe lorsque l'on inverse le sens de la transformation, sont des infiniment petits du même ordre que celui des autres forces. En revanche, dans le cas du frottement visqueux et des phénomènes associés tels que l'effet Joule, les forces de frottement s'annulent avec la vitesse. Par conséquent, si l'on rend cette vitesse arbitrairement petite, leur travail peut être négligé devant celui des autres forces (infiniment petit du second ordre). On pourra ainsi définir dans ce deuxième cas une transformation limite réversible.

Soulignons enfin que, dans le cadre de l'étude des convertisseurs d'énergie, les notions de transformations quasi-statique, réversible limite, ou idéale, revêtent une importance considérable. Elles permettent en effet d'accéder aux limites supérieures des grandeurs caractéristiques de la conversion d'énergie réalisée (travail fourni, forces maximales, etc.).

3.2 PARAMÈTRES D'ÉTAT D'UN SYSTÈME ÉLECTROMÉCANIQUE

3.2.1 Paramètres électromécaniques globaux

Les actions macroscopiques qu'exercent les sources extérieures sur le système sont souvent décrites à l'aide de paramètres externes à caractère *global*.

Ainsi, s'agissant tout d'abord des aspects mécaniques, ces paramètres globaux sont associés à des déplacements, des forces ou des couples résultants. Ceux-ci sont généralement transmis à travers un organe macroscopique reliant le système au milieu extérieur. Les paramètres globaux s'expriment en fonction des variables locales décrivant la déformation des mileux continus (déformation S_{ik}, contrainte T_{ik}) à l'aide des expressions (2.22), (2.23) et (2.24) établies à la section 2.2.3.

S'agissant des variables globales propres aux aspects électromagnétiques, leur définition résulte de manière générale des équations du champ électromagnétiques exprimées sous leur forme intégrale. Ainsi, l'équation $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, intégrée sur une surface (S_Γ) finie délimitée par un contour fermé orienté (Γ), fournit en utilisant le théorème de Stokes :

$$e = \int_{(\Gamma)} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\frac{d\varphi}{dt} \tag{3.1}$$

où e désigne la *force électromotrice* et φ le *flux magnétique* s'écoulant à travers la surface (S_Γ) conformément à la définition :

$$\varphi = \int_{(S_\Gamma)} \mathbf{B}\cdot\mathbf{ds} \tag{3.2}$$

Nous reviendrons à la section 4.3.4 sur cette formulation intégrale de la loi de l'induction, afin d'en dégager toute la signification tant pour les systèmes fixes plongés dans un champ variable que pour les circuits mobiles se mouvant dans le champ.

Par ailleurs, l'intégration sur le volume des termes de l'équation div $\mathbf{D} = \rho$ donne, en vertu de la formule de Gauss :

$$q_\mathrm{c} = \int_{(V)} \rho dv = \int_{(\partial V)} \mathbf{D}\cdot\mathbf{ds} \tag{3.3}$$

où q_c représente la *quantité de charge* électrique contenue dans le volume (V) bordé par la surface (∂V).

Quant au flux de la densité de courant $\mathbf{j}$ à travers une surface finie (S), il définit l'*intensité du courant i* qui la traverse :

$$i = \int_{(S)} \mathbf{j}\cdot\mathbf{ds} \tag{3.4}$$

Le calcul de la circulation du champ **E**, exprimé en fonction des potentiels du champ électromagnétique par (2.8), donne le long d'un trajet ouvert délimité par deux points M et N :

$$\int_M^N \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\int_M^N \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\mathbf{dl} + (\Phi_M - \Phi_N) = -\int_M^N \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\mathbf{dl} + v_{MN} \tag{3.5}$$

où l'intégrale au second membre représente la force électromotrice d'induction e_{MN} développée le long du trajet considérée, tandis que v_{MN} désigne la différence de potentiel, ou *tension*, aux bornes du dipôle MN. Dans le cas particulier où le trajet MN est matérialisé par un fil conducteur de section droite S constante dans lequel s'applique la loi d'Ohm ($\mathbf{E} = \rho_e \mathbf{j}$), la circulation de **E** s'écrit aussi (on suppose pour simplifier que **j** est uniforme et parallèle à **dl** tout le long du tube de courant considéré) :

$$\int_M^N \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \int_M^N \rho_e \mathbf{j}\cdot\mathbf{dl} = r_{MN} i \tag{3.6}$$

où le coefficient $r_{MN} = \dfrac{\rho_e l_{MN}}{S}$ représente la *résistance* du conducteur.

On aboutit alors à l'équation simplifiée qui régit la circulation du courant dans un circuit électrique siège d'une force électromotrice :

$$v_{MN} = r_{MN} i - e_{MN} \tag{3.7}$$

3.2.2 Classification en termes de variables généralisées

Conformément au formalisme de la mécanique analytique introduit à la section 2.3.1, le comportement dynamique d'un système peut être décrit au moyen de quatre catégories de paramètres ayant trait tour à tour aux *coordonnées* (q^λ), *vitesses* ($\dot{q}^\lambda$), *impulsions* (p_λ) et *forces* (f_λ). Il est désormais entendu que les degrés de liberté auxquels ces variables sont attachées ne sont pas nécessairement de nature mécanique. Ainsi, telles qu'elles ont été obtenues au chapitre 2, les équations du champ électromagnétique apparaissent comme une forme particulière des équations dynamiques généralisées écrites en termes de ces variables (équations de Lagrange). Il est donc naturel de chercher à classer les grandeurs macroscopiques décrivant les systèmes électro-magnéto-mécaniques à l'aide du paramétrage générique qu'offre le formalisme lagrangien.

De par sa définition même, la densité de courant **j** est liée à la notion de vitesse ($\mathbf{j} = \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ où $\mathbf{v}_\alpha$ désigne la vitesse des porteurs d'espèce (α), de densité de charge ρ_α). Par conséquent, l'intensité i du courant peut être considérée comme une vitesse généralisée. Cette intensité s'exprimant aussi comme la dérivée par rapport au temps de la charge q_c, cette dernière joue alors le rôle d'une coordonnée généralisée. Par ailleurs, le lien différentiel qui unit les composantes électriques et magnétiques du

champ ($\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$) peut être rapproché de la forme même des équations de Lagrange ($\dot{p}_\lambda = f_\lambda$). Ce lien suggère que le flux magnétique φ et la force électromotrice e soient respectivement considérés comme une impulsion et une force généralisées. Le tableau 3.1 résume ce point de vue et les analogies électro-mécaniques qui en découlent.

Tableau 3.1 Classification des paramètres électromécaniques globaux en terme de variables généralisées (convention « électrostatique »)

Variables généralisées	**Paramètres mécaniques**		**Paramètres électromagnétiques**
	« Translation » (d'axe Ox)	« Rotation » (d'axe Ox)	
coordonnée $\left(q^\lambda\right)$	abscisse (x)	angle (α)	charge électrique (q_c)
vitesse $(\dot{q}_\lambda)$	vitesse linéaire $(\dot{x})$	vitesse angulaire ($\dot{\alpha}$)	intensité du courant (i)
impulsion (p_λ)	quantité de mouvement (p_x)	moment cinétique (ζ)	flux magnétique (φ)
force (f_λ)	force (f_x)	moment dynamique (γ)	force électromotrice (e)

Il peut être utile d'examiner les correspondances qu'induisent ces analogies au niveau des lois de comportement caractéristiques des systèmes étudiés (cf. tableau 2.3). Ainsi, considérant plus particulièrement le cas de systèmes linéaires, la proportionnalité qui s'établit, à l'échelle globale, au sein d'un corps élastique entre force et déplacement aura pour homologue la loi linéaire qui unit la tension v et la quantité de charge q_c aux bornes d'un système d'électrodes polarisant un milieu diélectrique linéaire. En d'autres termes, la capacitance C_d d'un consensateur ($q_c = C_d v$) joue le même rôle que la compliance (inverse de la raideur k) d'un ressort ($f = kx$). De la même manière, la relation linéaire observée entre **B** et **H** dans un milieu magnétique linéaire isotrope se traduit, à l'échelle globale, par une proportionnalité entre les impulsions et vitesses généralisées que constituent respectivement le flux magnétique φ et l'intensité du courant i. L'inductance propre l d'une bobine ($\varphi = l\,i$) apparaît donc comme l'analogue d'une masse m ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$).

Plus généralement, l'analogie formulée dans le tableau 3.1 revient à identifier les termes d'énergie électrostatique (dont la variation s'exprime en $v dq_c$) avec une *énergie potentielle généralisée* (terme générique en $f_\lambda dq^\lambda$), tandis que l'énergie magnétostatique ($i\,d\varphi$) a trait à une *énergie cinétique généralisée* (terme générique en $\dot{q}^\lambda dp_\lambda$). Remarquons que cette situation est parfaitement cohérente avec le fait que la fonction de Lagrange du champ électromagnétique (champ libre) apparaît comme la différence des termes d'énergie magnétostatique et électrostatique (cf. note de bas de page de la

section 2.3.4). Les conséquences de ces correspondances énergétiques seront examinées au paragraphe 3.5.

L'analogie précédemment établie résulte de ce que la charge électrique q_c a été initialement associée à une variable de position. Ce choix correspond en ce sens à une convention que l'on peut qualifier d'« électrostatique ». Or, rien n'empêche, a priori, de convenir que c'est le flux magnétique φ qui joue le rôle de la coordonnée généralisée. L'énergie magnétostatique doit alors être considérée comme une énergie potentielle tandis que l'énergie du consensateur tient lieu d'énergie cinétique généralisée. Sur la base de cette convention dite « magnétostatique », on aboutit à un nouveau type d'analogies possibles explicité dans le tableau 3.2. Dans la suite de l'exposé, nous nous référerons le plus souvent à la convention de type électrostatique.

Tableau 3.2 Analogies électromécaniques selon les deux types de convention envisagées

Variables généralisées	Convention « électrostatique »	Convention « magnétostatique »
coordonnée (q^λ) vitesse $(\dot{q}^\lambda)$ impulsion (p_λ) force (f_λ)	charge électrique (q_C) intensité du courant (i) flux magnétique (φ) tension (v)	flux magnétique (φ) tension (v) charge électrique (q_C) intensité du courant (i)
correspondances en termes de variation d'énergie élémentaire	$(vdq_C) \leftarrow (f_\lambda dq^\lambda) \rightarrow (id\varphi)$ (énergie potentielle généralisée) $(id\varphi) \leftarrow (\dot{q}^\lambda dp_\lambda) \rightarrow (vdq_C)$ (énergie cinétique généralisée)	

3.2.3 Travail et chaleur en régime quasi-statique

L'interaction d'un système thermodynamique avec le milieu extérieur se traduit par un échange d'énergie. Cet échange peut s'opérer selon deux procédés distincts selon qu'il suppose ou non la variation des paramètres externes (liés à la position des corps extérieurs). Les procédés mettant en jeu une variation de ces paramètres correspondent à un transfert d'énergie sous forme de *travail*. Dans le cas où l'interaction s'effectue sans variation des paramètres externes, on a affaire à un transfert d'énergie opérée sous forme de *chaleur*.

Les paramètres externes caractérisent l'action du milieu extérieur sur le système. Ils permettent de définir les échanges d'énergie résultant du travail accompli par les sources extérieures. Ainsi, si n paramètres externes q^λ subissent une variation infiniment petite dq^λ, le travail reçu par le système s'exprime de manière générale par :

$$\delta W = f_{a_\lambda} dq^\lambda \tag{3.8}$$

où f_{a_λ} désigne la force généralisée appliquée par la source extérieure agissant sur le $\lambda^{ième}$ degré de liberté.

Les variables f_{a_λ} et q^λ constituent des paramètres conjugués, de même que tout couple de variables impliquées dans une relation énergétique du type de (3.8).

En régime quasi-statique, la force généralisée externe f_{a_λ} est équilibrée par la force interne f_λ. Ainsi, en vertu du deuxième postulat, les forces généralisées f_λ sont, à l'équilibre ou au cours d'une transformation quasi-statique, fonctions des paramètres externes et de la température. Les relations correspondantes sont dénommées *équations d'état* du système.

À titre d'exemple, on peut considérer la charge d'un condensateur idéal à travers une résistance ohmique. Le travail élémentaire fourni par le générateur extérieur au système électrique ainsi constitué s'exprime dans le cas général par :

$$\delta W = v_a dq_c \tag{3.9}$$

où v_a désigne la tension appliquée par le générateur et q_c la charge accumulée sur les armatures du condensateur.

À l'équilibre, la tension v_a (force généralisée externe) s'identifie à la tension v_c développée aux bornes du condensateur sous l'effet du champ électrostatique (force généralisée interne). Cette identité reste vraie au cours d'une charge infiniment lente obtenue en contrôlant le générateur de manière telle que le courant reste infiniment petit. La puissance dissipée par effet Joule, infiniment petit du second ordre, peut en effet être négligée devant la quantité du premier ordre que constitue la puissance fournie par le générateur. La transformation obtenue correspond alors à une transformation limite réversible que l'on peut également qualifier de processus quasi-statique. Quant à l'équation d'état du système, elle traduit la loi linéaire qui unit la tension v_c à la charge q_c. Le coefficient de capacité qui définit cette loi peut être éventuellement fonction de la température.

Notons que l'expression (3.8) du travail reçu ne constitue pas une forme différentielle totale exacte d'une fonction de l'ensemble des paramètres d'état du système. En effet, cette forme différentielle ne fait pas intervenir la différentielle de la température. L'évaluation du travail au cours d'une transformation quelconque dépendra donc du chemin emprunté entre les états initiaux et finaux (et non simplement des points extrêmes du trajet considérés, comme ce serait le cas pour la variation d'une fonction d'état).

Dans le cas des systèmes électromécaniques, les échanges d'énergie s'opèrent selon des procédés de natures électromagnétique, mécanique ou thermique. Ces échanges peuvent être évalués soit à l'échelle globale du système pris dans son ensemble, soit à l'échelle locale en isolant une partie élémentaire du milieu continu qui le compose. Les expressions correspondantes du travail et de la chaleur reçus sont ainsi rassemblées dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 Expressions des énergies élémentaires apportées sous forme de travail et de chaleur dans le cas d'un processus quasi-statique

Apport d'énergie sous forme de	Expression locale	Expression globale
travail « mécanique »	$T_{ik}dS_{ik}$	$f_{a_i}du_i$ (translation) $\gamma_k d\alpha_k$ (rotation)
travail « électrostatique »	$E_i dD_i = d\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) + E_i dP_i$ ($E_i dP_i$: travail de polarisation)	$v_a dq_c$
travail « magnétostatique »	$H_i dB_i = d\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + H_i dJ_i$ ($H_i dJ_i$: travail d'aimantation)	$id\varphi$
chaleur	$\Theta d\sigma$ (σ : entropie volumique)	$\Theta d\Sigma$ (Σ : entropie totale)

En ce qui concerne les contributions d'origine mécanique, elles résultent du travail des forces de contrainte interne lors de la déformation quasi-statique d'un volume élémentaire du corps. Ce travail est donné par la relation (2.25).

S'agissant des apports effectués sous forme électromagnétique, l'expression des travaux correspondants résultent directement de l'équation bilan (2.93) exprimant la conservation de l'énergie dans le champ électromagnétique en présence de sources et de milieux matériels. On définit ainsi le travail reçu par l'unité de volume d'un corps diélectrique lors de la variation du champ électrique sous l'effet du déplacement des sources qui le produisent ($\delta W_{\text{elec}} = E_i dD_i$). De même, la variation des paramètres associés au champ magnétique correspond à un travail qui s'exprime de manière similaire ($\delta W_{\text{mag}} = H_i dB_i$). Notons que la part de ces travaux spécifiquement associée aux phénomènes de polarisation ou d'aimantation des milieux doit être évaluée en soustrayant des expressions précédentes la différentielle totale exacte propre au travail d'excitation du champ dans le vide (cf. tableau 3.3). Ceci revient formellement à choisir comme variable indépendante la polarisation électrique P_i ou la polarisation magnétique J_i au lieu, respectivement, du déplacement électrique D_i ou du champ magnétique B_i.

Quant aux échanges effectués sous forme de chaleur, ils apparaissent, lors d'un processus quasi-statique, sous une forme analogue à celle du travail. La quantité élémentaire de chaleur reçue par le système est alors donnée par le produit de la température Θ, jouant le rôle d'une force généralisée, par la différentielle de la coordonnée qui lui est conjuguée, l'entropie Σ :

$$\delta Q = \Theta d\Sigma \tag{3.10}$$

3.3 PRINCIPES DE CONSERVATION ET D'ÉVOLUTION

3.3.1 Les deux premiers principes de la thermodynamique

Les systèmes électromécaniques considérés étant a priori des systèmes fermés, l'étude de leur équilibre et de leur évolution peut être appréhendée de manière générale à partir des deux premiers principes de la thermodynamique [**44**]. Un énoncé synthétique de ces deux principes est rappelé dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 Les deux premiers principes de la thermodynamique

Premier principe	Deuxième principe
Il existe une fonction d'état extensive et conservative, appelée énergie $\mathcal{E}$, dont la variation entre deux instants infiniment voisins est telle que : $d\mathcal{E} = \delta\mathcal{E}_p + \delta\mathcal{E}_r$ avec $\begin{cases} \delta\mathcal{E}_p = 0 \\ \delta\mathcal{E}_r = \delta Q + \delta W \end{cases}$	Il existe une fonction d'état extensive et non conservative, appelée entropie Σ, dont la variation entre deux instants infiniment voisins est telle que : $d\Sigma = \delta\Sigma_p + \delta\Sigma_r$ avec $\begin{cases} \delta\Sigma_p \geqslant 0 \\ \delta\Sigma_r = \dfrac{\delta Q}{\Theta} \end{cases}$
δX_p : fraction de la grandeur X produite par le système ($X = \mathcal{E}, \Sigma$) δX_r : fraction de la grandeur X reçue par le système δW : part d'énergie reçue sous forme de travail δQ : part d'énergie reçue sous forme de chaleur	

Le premier principe englobe en un seul et même concept, l'énergie, les notions de travail et de chaleur. Il stipule que cette grandeur ne peut être ni produite, ni détruite ($\delta\mathcal{E}_p = 0$). Il s'agit donc d'un principe de *conservation*. Au contraire, l'inégalité définissant la formulation du second principe en fait une loi d'*évolution*. La production d'entropie donne le sens de toute transformation spontanée et indique en cela « la flèche du temps » : pour un système adiabatiquement isolé, l'entropie Σ ne peut que croître. L'entropie produite peut être considérée comme une mesure du degré d'irréversibilité de la transformation. Les états d'équilibre, de même que les processus quasi-statiques, seront ainsi caractérisés par une production d'entropie nulle ($\delta\Sigma_p = 0$). La variation d'entropie se réduit dans ce cas à la part échangée avec le milieu extérieur et la quantité de chaleur correspondante est alors directement exprimée en terme de cette variation ($\delta Q = \Theta d\Sigma$).

Par conséquent, dans le cas d'un système comportant n degrés de liberté électromécaniques et subissant une transformation réversible ou idéale, la combinaison des

deux premiers principes conduit à l'*équation fondamentale* :

$$d\mathcal{E} = \delta Q + \delta W = \Theta d\Sigma + f_{a_\lambda} dq^\lambda \tag{3.11}$$

L'énergie est une fonction univoque de l'état du système. Sa variation entre deux états voisins est donc une différentielle totale (premier principe). L'équation fondamentale pour les transformations équilibrées montre que l'énergie $\mathcal{E}$ est une fonction d'état des n paramètres externes indépendants q^λ et de l'entropie Σ.

On a coutume de décomposer l'énergie totale $\mathcal{E}$ en deux contributions principales :

- l'*énergie externe* qui rend compte, d'une part, de l'*énergie cinétique* ($\mathcal{E}_c$) associée au mouvement macroscopique des sous-ensembles constituant le système et, d'autre part, de l'*énergie potentielle* ($\mathcal{E}_p$) que lui confèrent les champs de force d'origine extérieure auquel il est éventuellement soumis (comme par exemple le champ de gravitation) ;
- l'*énergie interne* dans laquelle on englobe le reste de l'énergie que renferme le système. Dans le cas des dispositifs électromécaniques, cette énergie pourra indifféremment être stockée :
  - sous forme d'une déformation mécanique (énergie « élastique ») ;
  - dans le champ électromagnétique ou sous l'action d'une polarisation électrique (énergie « électrostatique ») ou d'une aimantation (énergie « magnétostatique ») de la matière ;
  - sous forme calorifique (énergie « thermique ») ;
  - etc.

Afin d'illustrer concrètement ces différents concepts, on peut prendre l'exemple d'un système électromagnétique relativement simple tel que celui qui est étudié ci-après.

3.3.2 Cas d'un système « simple » : l'injecteur électromagnétique de carburant

Le dispositif électromécanique schématisé sur la figure 3.1 correspond à un injecteur à effet électromagnétique utilisé pour doser le carburant dans les moteurs thermiques à combustion interne (moteurs « à injection électronique »). L'alimentation par un courant d'intensité i de la bobine (solénoïde) qui équipe sa partie fixe entraîne l'attraction du noyau mobile : l'entrefer x tend à se refermer sous l'action du champ magnétique longitudinal produit entre les pôles fixes et mobiles. Le noyau est solidaire d'une aiguille dont la levée permet au carburant de s'échapper par la partie inférieure du corps de l'injecteur. Lorsque l'alimentation est coupée, un ressort de rappel ramène l'extrémité de l'aiguille sur son siège, interrompant ainsi l'éjection du carburant.

Supposons dans un premier temps que le fonctionnement du dispositif corresponde à un processus réversible (on néglige de ce fait toutes les causes de dissipation de l'énergie telles que les frottements mécaniques ou la résistance de la bobine). Dans ces conditions, l'équation fondamentale prend la forme :

$$d\left(\mathcal{E}_{\mathrm{c}} + U_{\mathrm{elast}} + U_{\mathrm{mag}} + U_{\mathrm{th}} + \mathcal{E}_{p_{\mathrm{ext}}}\right) = f_{a_x}dx + i\,d\varphi + \Theta d\Sigma \qquad (3.12)$$

où les différents termes du premier membre représentent les énergies cinétique ($\mathcal{E}_{\mathrm{c}}$), élastique (U_{elast}), magnétique (U_{mag}), thermique (U_{th}) et potentielle externe ($\mathcal{E}_{p_{\mathrm{ext}}}$), due au poids de l'équipage mobile supposé se déplacer selon un axe vertical (ce terme est généralement négligeable). En première approximation, sous les hypothèses classiquement admises pour les système « linéaires », ces énergies sont définies par :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 & (m \text{ : masse de l'équipage mobile}) \\ U_{\mathrm{elast}} = \dfrac{1}{2}k\,(x - x_0)^2 & (k = k\,(\Theta) \text{ : raideur du ressort dont la position de repos est } x_0) \\ U_{\mathrm{mag}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi^2}{l} & (l = l\,(\Theta, x) \text{ : inductance propre de la bobine}) \\ U_{\mathrm{th}} = C_{th}\Theta + cte & (C_{th} \text{ : capacité calorifique de l'injecteur}) \\ \mathcal{E}_{\mathrm{p}} = -mgx + cte & (g \text{ : accélération de la pesanteur}) \end{cases} \qquad (3.13)$$

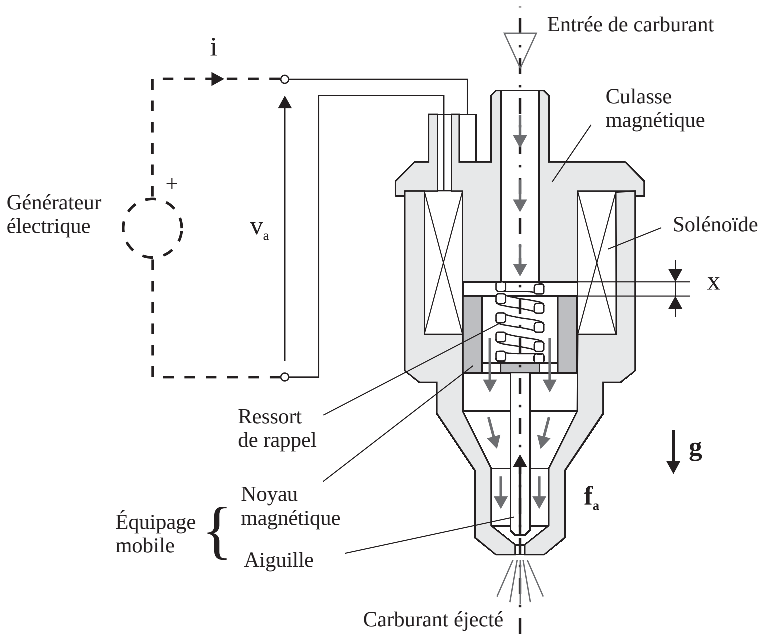


Figure 3.1 Structure schématique d'un injecteur électromagnétique de carburant

Les termes au second membre de (3.12) rendent compte de l'énergie échangée. Les échanges opérés avec variation des paramètres externes x et φ ont trait, d'une part, au travail du générateur électrique ($i d\varphi$) et, d'autre part, au travail mécanique des forces de « contre-pression » $\mathbf{f}_a$ exercées sur l'aiguille sous l'effet du fonctionnement du moteur thermique. Le dernier terme rend compte des échanges de chaleur entre l'injecteur et le milieu environnant, que l'on pourra généralement assimiler à un *thermostat* (corps de capacité calorifique suffisamment grande pour que sa température puisse être considérée comme constante).

Dans le cas général, il convient naturellement de tenir compte des causes d'irréversibilité associées aux forces dissipatives agissant dans le système. Si l'on s'intéresse plus spécifiquement aux pertes engendrées par effet Joule dans la bobine, on peut notamment chercher à évaluer la production d'entropie correspondante. À cette fin, supposons par exemple que, entre deux instants t_1 et t_2, la température de l'injecteur varie de Θ_1 à Θ_2. Le milieu ambiant est assimilé à un thermostat de température Θ_0. On ne considère ici pour simplifier que le problème « électro-thermique », les autres formes d'énergie étant supposées inopérantes. L'entropie étant une fonction d'état, sa variation $\Delta\Sigma$ entre les deux instants considérés ne dépend pas du chemin suivi, si bien que l'on peut évaluer sa variation le long d'un chemin réversible imaginaire tel que :

$$\delta Q = C_{th} d\Theta = \Theta d\Sigma \tag{3.14}$$

d'où :

$$\Delta\Sigma = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{C_{th}}{\Theta} d\Theta = C_{th} \log\left(\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\right) \tag{3.15}$$

Par ailleurs, au cours de la transformation réelle, le générateur électrique maintient un courant d'intensité i supposé constante dans la bobine de résistance r. Il développe à ses bornes une tension $v_a = ri$ et fournit par conséquent un travail ($\delta W = v_a dq_c = ri^2 dt$) dont l'intégrale entre t_1 et t_2 vaut $W = ri^2 \Delta t$. Le noyau mobile étant au repos, la quantité de chaleur $-Q$ fournie au milieu extérieur durant le même temps est donc donnée par :

$$-Q = W - \Delta U_{\text{th}} = ri^2 \Delta t - C_{th} \Delta\Theta \tag{3.16}$$

Le dispositif reçoit de la part du thermostat une entropie Q/Θ_0. En effectuant le bilan de cette grandeur, on trouve finalement pour l'entropie produite Σ_p pendant l'intervalle de temps considéré :

$$\Sigma_p = \Delta\Sigma - Q/\Theta_0 = C_{th} \log\left(\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\right) + \frac{1}{\Theta_0}\left[ri^2 \Delta t - C_{th} \Delta\Theta\right] \tag{3.17}$$

En régime permanent, la température de la bobine est constante :

$$\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = 0$$

L'entropie produite est alors exactement compensée par l'entropie reçue. Dans le cas d'un fonctionnement adiabatique ($\delta Q = 0$), l'énergie dissipée est au contraire confinée dans le volume du dispositif. La température interne croît, de même que l'entropie, tant que la source de dissipation n'est pas interrompue.

3.4 SYSTÈMES ÉLECTROMÉCANIQUES À L'ÉQUILIBRE

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le souligner, les transformations équilibrées sont d'une grande importance pour l'étude des systèmes électromécaniques. Même si le fonctionnement réel de ces dispositifs ne peut être que très rarement assimilé à un tel processus, il est souvent judicieux, comme dans l'exemple précédent, de raisonner sur la transformation limite réversible pour évaluer la variation des fonctions d'état mises en jeu. Le régime quasistatique est également très utile pour déterminer les forces généralisées développées par le système. Celles-ci s'obtiennent alors par dérivation d'une fonction d'état appropriée. La définition de cette fonction, qui dépend étroitement du jeu de variables indépendantes choisi pour paramétrer le système, repose sur une méthode à caractère systématique largement utilisée en thermodynamique, la méthode des *potentiels*.

3.4.1 Notion de potentiel thermodynamique

Considérons le cas d'un système électromécanique évoluant en l'absence de tout champ de force extérieur (dans le cas contraire, il suffira de tenir compte du terme $\mathcal{E}_{p_{\text{ext}}}$ dans l'énergie totale). La combinaison du premier et du second principe conduit, dans le cas d'une transformation quelconque, à l'équation :

$$d\,(\mathcal{E}_{\text{c}} + U) = \delta Q + \delta W = \Theta d\Sigma - \Theta \delta \Sigma_p + \delta W \qquad (3.18)$$

qui s'écrit encore :

$$d\mathcal{E}_{\text{c}} + dU + \Theta \delta \Sigma_p = \Theta d\Sigma + \delta W \qquad (3.19)$$

– Supposons tout d'abord que le système évolue à **entropie constante** (ce qui, le long d'un chemin réversible, est synonyme d'évolution adiabatique $\delta Q = 0$).

Si, le système est en outre électriquement et mécaniquement isolé ($\delta W = 0$), l'équation (3.19) se réduit à :

$$d\mathcal{E}_{\text{c}} + dU + \Theta \delta \Sigma_p = 0 \qquad (3.20)$$

Or, partant d'une position de repos mécanique donnée, l'évolution spontanée du système se traduit par les inégalités :

$$\begin{cases} d\mathcal{E}_{\text{c}} > 0 & \text{(mise en mouvement du système)} \\ \delta \Sigma_p \geqslant 0 & \text{(second principe)} \end{cases} \qquad (3.21)$$

Par conséquent, l'évolution envisagée n'est possible que si l'énergie interne U peut diminuer ($\Theta > 0$). La condition d'évolution s'écrit donc :

$$dU < 0 \tag{3.22}$$

Un état d'équilibre est atteint lorsque U est stationnaire :

$$dU = 0 \tag{3.23}$$

sachant que cet équilibre sera stable si l'extremum correspondant est un minimum défini par :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0 \tag{3.24}$$

où q désigne le paramètre représentatif de l'évolution du système (cf. l'exemple du paragraphe 3.4.4).

Dans le cas où le système échange de l'énergie avec les sources extérieures lors d'une transformation telle que l'énergie cinétique ne varie pas (dans le cas, par exemple, où le système évolue à vitesse constante), il vient immédiatement :

$$\delta W = dU + \Theta\delta\Sigma_p \geqslant dU \tag{3.25}$$

ou encore :

$$-\delta W \leqslant -dU \tag{3.26}$$

ce qui signifie que le bilan du travail fourni par le système à entropie et énergie cinétique constantes est inférieur ou égal à la diminution de son énergie interne. Le travail fourni est maximal dans le cas où la transformation est réversible ($\delta W = dU$).

Ainsi, lors d'une transformation opérée à entropie constante, la fonction énergétique qui rend compte des possibilités d'évolution du système et du travail qu'il est susceptible d'échanger avec le milieu extérieur est l'énergie interne U. Cette grandeur constitue en ce sens un *potentiel thermodynamique*.

– Supposons maintenant que le système évolue à **température constante** Θ_0 (ce qui, pour l'expérimentateur, constitue souvent des conditions plus « naturelles »).

  L'équation (3.19) devient dans ce cas :

$$d\mathcal{E}_c + dU + \Theta_0\delta\Sigma_p = \Theta_0 d\Sigma + \delta W \tag{3.27}$$

ou encore :

$$d\mathcal{E}_c + d\left(U - \Theta_0\Sigma\right) + \Theta_0\delta\Sigma_p = \delta W \tag{3.28}$$

Par conséquent, en introduisant la fonction *énergie libre* définie par :

$$F = U - \Theta_0\Sigma \tag{3.29}$$

on est ramené au problème précédent, à savoir que les conditions d'évolution ($dF < 0$), d'équilibre ($dF = 0$) et de stabilité (F minimum) formulées en terme de ce nouveau potentiel thermodynamique caractérisent le cas d'une transformation

opérée à température constante. De même, le bilan du travail fourni par le système revient dans ces conditions à la diminution de son énergie libre.

On peut aisément étendre ces raisonnements à des conditions de fonctionnement variées, ce qui constitue précisément l'objet de la méthode des potentiels.

– Supposons par exemple que le système évolue à **température constante**, un certain nombre de sources extérieures auxquelles il est connecté travaillant à **force généralisée constante**.

Convenant que ces sources ont trait aux m premières coordonnées généralisées, on peut isoler le travail qu'elles accomplissent en écrivant :

$$\delta W = f_{a_{0\rho}} dq^{\rho} + \delta W' \quad (\rho = 1, \dots, m) \tag{3.30}$$

où $\delta W'$ désigne le travail accompli par les $n - m$ sources restantes ($m \leqslant n$).

Par conséquent, il vient dans ce cas, à partir de l'équation initiale (3.19) :

$$d\mathcal{E}_{\mathrm{c}} + dU + \Theta_0 \delta\Sigma_p = \Theta_0 d\Sigma + f_{a_{0\rho}} dq^{\rho} + \delta W' \tag{3.31}$$

soit, puisque Θ_0 et $f_{a_{0\rho}}$ sont constants :

$$d\mathcal{E}_{\mathrm{c}} + d\left(U - \Theta_0\Sigma - f_{a_{0\rho}} q^{\rho}\right) + \Theta_0 \delta\Sigma_p = \delta W' \tag{3.32}$$

En introduisant une *enthalpie libre généralisée* G définie par :

$$G = U - \Theta_0\Sigma - f_{a_{0\rho}} q^{\rho} \tag{3.33}$$

les conditions d'évolution et d'équilibre du système, et le bilan du travail qu'il fournit aux sources autres que celles travaillant à force constante, se déduisent des raisonnements précédents en remplaçant simplement F par G. L'enthalpie libre généralisée correspond donc au potentiel thermodynamique approprié pour l'étude d'un système travaillant à température et forces généralisées constantes.

Le tableau 3.5 résume les principales conditions de fonctionnement envisageables et les potentiels thermodynamiques qui s'y rapportent.

Conditions de la transformation ($\mathcal{E}_{\mathbf{p}_{\mathrm{ext}}} = \mathbf{0}$)	**Entropie constante**	**Température constante**	**Entropie et forces généralisées constantes**	**Température et forces généralisées constantes**
Potentiel thermodynamique adapté	énergie interne U	énergie libre $F = U - \Theta_0\Sigma$	enthalpie généralisée $H = U - f_{a_{0\rho}} q^{\rho}$ ($\rho = 1, \dots, m$)	enthalpie libre généralisée $G = F - f_{a_{0\rho}} q^{\rho}$ ($\rho = 1, \dots, m$)
Condition d'équilibre stable	U minimum	F minimum	H minimum	G minimum
Bilan du travail fourni ($\mathcal{E}_{\mathbf{c}} = \mathbf{cte}$)	$\leqslant$ diminution de U	$\leqslant$ diminution de F	$\leqslant$ diminution de H	$\leqslant$ diminution de G

Tableau 3.5 Potentiels thermodynamiques associés aux principales conditions d'évolution

Remarquons d'un point de vue plus pratique que la transformation qui permet, à partir de l'énergie interne, d'introduire les différents potentiels utilisables revient à considérer l'énergie interne d'un système « élargi », incluant les sources qui maintiennent constants certains des paramètres du système (i.e. le thermostat ou les sources travaillant à force généralisée constante). Le travail mis en jeu pour le maintien de ces paramètres devient alors transparent du point de vue du système élargi.

3.4.2 Fonctions d'état associées

L'utilité des potentiels thermodynamiques dépasse largement le cadre des transformations particulières précédemment considérées. Construits à partir de l'énergie interne en combinant diverses variables d'état, ces potentiels constituent par définition de nouvelles *fonctions d'état* qui se révèleront très utiles pour décrire les systèmes thermodynamiques à l'aide de différents jeux de variables indépendantes.

Ainsi, dans le cas d'une transformation quasi-statique (effectuée comme précédemment en l'absence de champ de force extérieur), la différentielle de l'énergie interne s'écrit de manière générale :

$$dU = \Theta d\Sigma + f_{a_\lambda} dq^\lambda \tag{3.34}$$

L'expression de cette forme différentielle totale exacte assure que U est une fonction des variables indépendantes extensives que représentent l'entropie Σ et les coordonnées généralisées q^λ :

$$U = U\left(\Sigma, q^1, \ldots, q^n\right) \tag{3.35}$$

On dira que U est un potentiel thermodynamique par rapport aux variables $\left(\Sigma, q^1, \ldots, q^n\right)$.

De même, la fonction d'état $F = U - \Theta\Sigma$, qui généralise la notion d'énergie libre précédemment introduite (à température constante), admet comme différentielle lors d'une transformation réversible quelconque :

$$dF = dU - \Theta d\Sigma - \Sigma d\Theta = -\Sigma d\Theta + f_{a_\lambda} dq^\lambda \tag{3.36}$$

ce qui assure :

$$F = F\left(\Theta, q^1, \ldots, q^n\right) \tag{3.37}$$

La définition de l'énergie libre revient formellement à inclure la température Θ dans le jeu de variables indépendantes, à la place de l'entropie Σ. Ainsi, moyennant une transformation mathématique élémentaire (transformation de Legendre), il est possible d'interchanger les rôles que jouent deux variables conjuguées dans le paramétrage du système. Le procédé peut être avantageusement étendu à l'ensemble des degrés de liberté du système.

Par exemple, l'enthalpie libre généralisée $G = F - \Theta\Sigma - f_{a_\rho} dq^\rho$, dont la différentielle s'écrit :

$$dG = -\Sigma d\Theta - q^\rho d f_{a_\rho} + f_{a_\lambda} dq^\lambda \quad (\rho = 1, \ldots, m\ ;\ \lambda = m+1, \ldots, n) \tag{3.38}$$

constitue un potentiel thermodynamique par rapport aux variables :

$$\left(\Theta,\ f_{a_1}, \ldots,\ f_{a_m}, q^{m+1}, \ldots, q^n\right)$$

On peut ainsi, grâce à un choix judicieux de la fonction d'état, faire figurer comme variables indépendantes les grandeurs physiques les plus « commodes » vis-à-vis des conditions d'exploitation particulières auxquelles le système est soumis (cf. l'exemple de la section 3.4.4).

Notons par ailleurs que ce type de transformation peut indifféremment s'opérer à l'échelle des grandeurs globales ou locales. Ainsi, prenant l'exemple de la magnétostatique, on sait qu'une variation élémentaire dB_i du champ magnétique (coordonnée généralisée), opérée sous une excitation H_i (force généralisée), donne lieu à un travail volumique dont le terme générique est $H_i dB_i$ (cf. tableau 3.3). Évaluée le long d'un chemin isotherme n'impliquant aucun déplacement des sources, l'énergie libre d'origine magnétostatique contenue dans le volume (V) s'obtient donc au moyen de l'intégrale :

$$F_{\text{mag}} = \int_{(V)} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{B}} H_i dB_i\, dv \tag{3.39}$$

Or, dans le cas fréquent où les sources du champ correspondent à des courants « donnés », il est plus naturel de considérer comme variable indépendante l'excitation H_i (dont le rotationnel s'identifie à la densité de courant volumique). On est alors amené à définir une « enthalpie libre magnétostatique » obtenue en soustrayant le terme $H_i B_i$ de la densité volumique d'énergie libre. Il vient ainsi pour cette nouvelle fonction d'état :

$$G_{\text{mag}} = -\int_{(V)} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} B_i dH_i\, dv \tag{3.40}$$

Lors d'une transformation isotherme opérée à excitation H_i donnée, cette quantité s'identifie au potentiel thermodynamique qu'il y a lieu de considérer pour décrire l'équilibre magnétostatique, ou bien évaluer les échanges d'énergie effectués sous forme de travail mécanique par exemple. Exprimée à l'aide des variables globales (intensité du courant i et flux magnétique φ), cette enthalpie se définira d'une manière analogue par :

$$G_{\text{mag}} = F_{\text{mag}} - i\varphi \tag{3.41}$$

Dans les ouvrages d'électricité, on désigne plus communément ce potentiel (au signe près) sous le nom de « coénergie magnétique » ($F^*_{\text{mag}} = -G_{\text{mag}} = i\varphi - F_{\text{mag}}$)[1].

(1) Le terme *coénergie* signifie *énergie complémentaire*.

3.4.3 Expressions des forces en régime quasi-statique

En mécanique, les forces conservatives s'expriment à partir de la dérivation d'une énergie potentielle par rapport aux variables de position correspondantes. D'une manière tout à fait analogue, les forces généralisées agissant dans les systèmes considérés s'obtiendront, en régime quasi-statique, par dérivation d'un potentiel thermodynamique convenablement choisi. Ceci résulte directement des propriétés des différentielles totales exactes associées aux fonctions d'état précédemment définies. Ainsi, la différentielle de l'énergie interne s'écrivant de manière générale :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \Sigma}\right)_{q^\lambda} d\Sigma + \left(\frac{\partial U}{\partial q^\lambda}\right)_{\substack{\Sigma, q^\sigma \\ (\sigma \neq \lambda)}} dq^\lambda \tag{3.42}$$

il vient immédiatement, après identification avec (3.34) :

$$f_{a_\lambda} = \left(\frac{\partial U}{\partial q^\lambda}\right)_{\Sigma, q^\sigma\ (\sigma \neq \lambda)} \tag{3.43}$$

(les indices à droite de la parenthèse rappellent les grandeurs maintenues constantes au cours de la dérivation partielle).

De même, si le problème est formulé en terme d'enthalpie libre généralisée, ces mêmes forces s'obtiendront par :

$$f_{a_\lambda} = \left(\frac{\partial G}{\partial q^\lambda}\right)_{\Theta, f_{a_\rho}, q^\sigma\ (\sigma \neq \lambda)} \tag{3.44}$$

Les formulations déduites des différentes fonctions d'état utilisables sont rassemblées dans le tableau 3.6.

Tableau 3.6 Principales formulations utilisables pour le calcul des forces généralisées en régime quasi-statique

Variables indépendantes	$(\Sigma, q^1, \ldots, q^n)$	$(\Theta, q^1, \ldots, q^n)$	$(\Sigma, f_{a_1}, \ldots, f_{a_m}, q^{m+1}, \ldots, q^n)$	$(\Theta, f_{a_1}, \ldots, f_{a_m}, q^{m+1}, \ldots, q^n)$
Fonction d'état appropriée	U (énergie interne)	$F = U - \Theta\Sigma$ (énergie libre)	$H = U - f_{a_\rho} q^\rho$ (enthalpie généralisée)	$G = F - f_{a_\rho} q^\rho$ (enthalpie libre généralisées)
Expression des forces généralisées	$f_{a_\lambda} = \left(\frac{\partial U}{\partial q^\lambda}\right)_{\substack{\Sigma, q^\sigma \\ (\sigma \neq \lambda)}}$	$f_{a_\lambda} = \left(\frac{\partial F}{\partial q^\lambda}\right)_{\substack{\Theta, q^\sigma \\ (\sigma \neq \lambda)}}$	$f_{a_\lambda} = \left(\frac{\partial H}{\partial q^\lambda}\right)_{\substack{\Sigma, f_{a_\rho}, q^\sigma \\ (\sigma \neq \lambda)}}$	$f_{a_\lambda} = \left(\frac{\partial G}{\partial q^\lambda}\right)_{\substack{\Theta, f_{a_\rho}, q^\sigma \\ (\sigma \neq \lambda)}}$
	$(\lambda, \sigma = 1, \ldots, n)$		$(\rho = 1, \ldots, m\ ;\ \lambda, \sigma = m+1, \ldots, n)$	

Appliquées au calcul des actions mécaniques locales par exemple, ces formulations permettent, conformément à la relation (2.26), d'exprimer le tenseur des contraintes (T_{ik}) comme la dérivée à entropie constante de l'énergie interne volumique par rapport aux composantes du tenseur de déformation, ou encore comme la dérivée à température constante de l'énergie libre volumique.

Dans un tout autre domaine, la mise en jeu d'une « enthalpie libre magnétostatique », définie par une relation du type de (3.41), se révélera très utile pour exprimer le flux magnétique en fonction de l'intensité des courants qui lui donnent naissance. L'exemple traité ci-après permet d'illustrer l'intérêt pratique de la méthode des potentiels pour l'étude des convertisseurs électromécaniques.

3.4.4 Exemple d'application

La figure 3.2 donne le schéma de principe d'un actionneur électromécanique rotatif à effet magnétique. La partie fixe (stator) est constituée d'un circuit magnétique de forte perméabilité autour duquel sont enroulées les spires d'une bobine connectée à un générateur extérieur. La partie tournante (rotor) correspond à une pièce ferromagnétique de forme allongée susceptible de « s'aligner » dans le champ magnétique engendré entre les pôles du stator lorsque la bobine est alimentée.

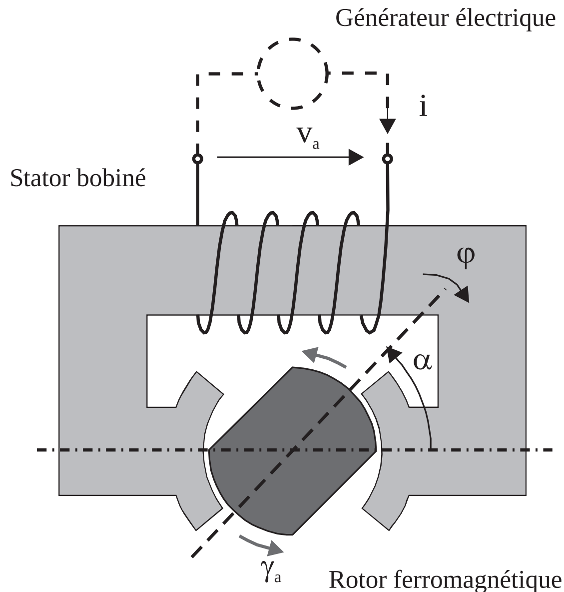


Figure 3.2 Actionneur rotatif à effet magnétique

On se propose d'étudier les propriétés globales de ce dispositif à partir de la méthode énergétique précédemment exposée.

À cette fin, les **hypothèses simplificatrices** suivantes sont formulées :

– les frottements mécaniques et la résistance du bobinage sont négligés ;
– le comportement du circuit magnétique est linéaire ;
– l'actionneur évolue en régime quasi-statique, à température constante.

Dans ces conditions, l'état du système peut être caractérisé au moyen de trois paramètres indépendants : la température Θ, la position angulaire du rotor α et le flux magnétique φ embrassé par les spires de la bobine. L'actionneur fonctionnant à température constante, il est naturel de choisir comme fonction énergétique de référence l'énergie libre $F = F(\Theta, \alpha, \varphi)$. On admettra que, pour le problème et la structure électromagnétique considérés, cette fonction d'état s'exprime par :

$$F(\Theta, \alpha, \varphi) = F_{\text{mag}}(\Theta, \alpha, \varphi) + F_0(\Theta)$$
$$\text{où } F_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{l} \text{ (partie magnétique de l'énergie libre)} \quad (3.45)$$
$$\text{avec } \begin{cases} \varphi = l\, i \\ l(\Theta, \alpha) = l_0(\Theta) + l_2(\Theta)\cos^2\alpha \end{cases}$$

(relations que l'on suppose déduites de l'expérience ou bien justifiées par un calcul du champ magnétostatique).

Différentes conditions de fonctionnement de l'actionneur peuvent être considérées.

- Envisageons tout d'abord le cas où le système évolue **à flux magnétique constant**.

La résistance de la bobine étant négligée, ce type de fonctionnement revient en pratique à court-circuiter ses bornes ($v = \partial\varphi/\partial t = 0$) après qu'un courant y ait été initialement lancé. Dans ces conditions, l'énergie libre ne varie plus que sous l'effet d'un seul paramètre, la position angulaire du rotor α. Le potentiel thermodynamique correspondant est donc défini par la fonction :

$$F_{\Theta,\varphi}(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{\left(l_0 + l_2\cos^2\alpha\right)} + F_0 \quad (3.46)$$

(où l_0, l_2 et F_0 sont des constantes positives).

Conformément aux raisonnements développés à la section 3.4.1 et comme l'illustre la figure 3.3 (a), les minima de cette fonction déterminent les positions d'équilibre stable ($\alpha = 0$ modulo π) dans lesquelles le rotor cherche spontanément à se placer en l'absence de sollicitations extérieures. Dans le cas où un couple extérieur, de moment γ_a, est appliqué sur son axe, le bilan d'énergie s'écrit, pour un déplacement $d\alpha$ élémentaire :

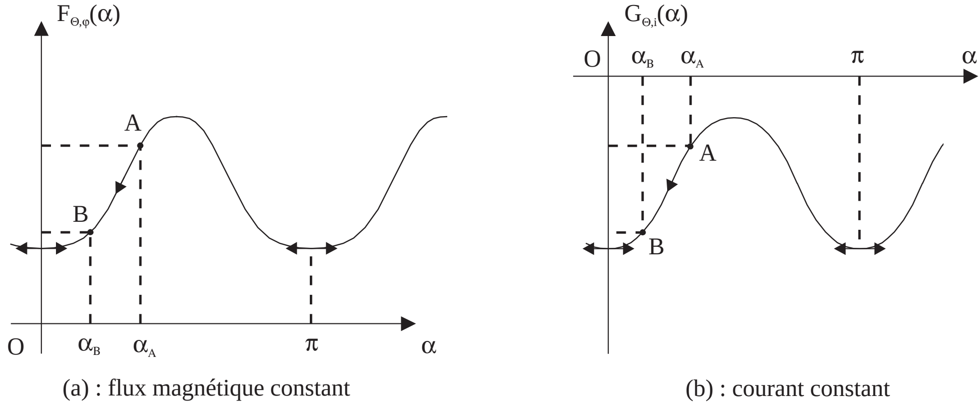
$$dF = -\Sigma d\Theta + \gamma_a d\alpha + i\,d\varphi = \gamma_a d\alpha \quad (3.47)$$

Par conséquent, le travail mécanique fourni par l'actionneur (à flux constant) au cours d'un déplacement infiniment lent de son rotor entre deux positions A et B

correspond à la diminution de son énergie libre, soit :

$$W_{\underset{A\to B}{\text{mec}}} = F_{\Theta,\varphi}(\alpha_A) - F_{\Theta,\varphi}(\alpha_B) \quad (3.48)$$

- Un deuxième mode de fonctionnement a trait au cas où le système fonctionne **à courant constant**.



(a) : flux magnétique constant

(b) : courant constant

Figure 3.3 Évolution des potentiels thermodynamiques associés à un déplacement du rotor à flux constant (a) et à courant constant (b)

Le maintien du courant à une valeur constante, quelle que soit la position du rotor, suppose que le générateur fournisse le travail nécessaire à la compensation des forces électromotrices (variations du flux magnétique) engendrées par le déplacement du rotor. Le potentiel thermodynamique dont relève ce type de fonctionnement à température et force constantes (le courant joue le rôle d'une force généralisée) correspond, si l'on se réfère au tableau 3.5, à une enthalpie libre magnétostatique obtenue, conformément à (3.41), en soustrayant le produit $i\varphi$ de l'énergie libre F.

L'évolution de ce potentiel lors du déplacement du rotor correspond ainsi à la fonction :

$$G_{\Theta,i}(\alpha) = -\frac{1}{2}\left(l_0 + l_2 \cos^2 \alpha\right) i^2 + F_0 \quad (3.49)$$

Comme on peut le vérifier sur la figure 3.3 (b), les minima de $G_{\Theta,i}$ déterminent des positions d'équilibre stable qui coïncident avec celles qui résultent du fonctionnement à flux constant. Soulignons cependant l'importance d'un choix approprié du potentiel thermodynamique utilisé : un raisonnement erroné pourrait par exemple conclure à l'existence d'un équilibre stable pour $\alpha = \pi/2$ modulo π si l'on considère les minima de F, et non ceux de G, lors du fonctionnement à courant constant !

S'agissant du travail mécanique fourni durant le déplacement, il résulte directement de la variation d'enthalpie libre magnétique dont la différentielle s'écrit :

$$dG = -\Sigma d\Theta + \gamma_a d\alpha - \varphi di = \gamma_a d\alpha \qquad (3.50)$$

ce qui donne pour le travail fourni à courant constant entre deux positions A et B :

$$W_{\substack{\text{mec} \\ A\to B}} = G_{\Theta,\varphi}(\alpha_A) - G_{\Theta,\varphi}(\alpha_B) \qquad (3.51)$$

En ce qui concerne la détermination du couple γ résultant des efforts électromagnétiques qu'exercent les pôles statoriques sur le noyau rotorique (couple interne équilibré, en régime quasi-statique, par le couple extérieur γ_a appliqué sur l'arbre), il résulte directement des formules générales établies au paragraphe précédent. Ainsi, d'après le tableau 3.6, ce couple pourra être indifféremment calculé :

– soit par dérivation (à flux constant) de l'énergie libre F ;

– soit par dérivation (à courant constant) de l'enthalpie libre magnétique G.

On vérifie ainsi l'identité :

$$\gamma = -\gamma_a = -\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_{\Theta,\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{\left(l_0 + l_2\cos^2\alpha\right)^2} l_2 \sin 2\alpha = -\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)_{\Theta,i} \qquad (3.52)$$

Remarquons enfin que, suite aux hypothèses de linéarité effectuées sur le plan magnétique, les parties magnétiques de l'énergie libre F et de l'enthalpie libre G ont des valeurs égales et opposées ($G_{\text{mag}} = -F_{\text{mag}} = -\frac{1}{2}li^2$). Par conséquent, lors d'une transformation isotherme opérée *à courant constant*, l'énergie convertie en travail mécanique (diminution de G) est égale à la part d'énergie stockée dans la structure sous forme magnétique (augmentation de F). En d'autres termes, le générateur électrique fournit exactement le double du travail mécanique produit par l'actionneur :

$$\delta W_{\text{elec}} = dF - \delta W_{\text{mec}} = dF - dG = -2dG = -2\delta W_{\text{mec}} \qquad (3.53)$$

3.5 INTRODUCTION À LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES ÉLECTROMÉCANIQUES

Les considérations précédentes sur l'équilibre des systèmes thermodynamiques donnent lieu, au travers de la notion de potentiel, à une méthode aussi générale que systématique pour l'étude du comportement statique, ou quasi-statique, des dispositifs électromécaniques. Si ce point de vue est très précieux, notamment pour la détermination des forces conservatives agissant au sein des convertisseurs d'énergie étudiés, il demeure insuffisant dès lors que l'on s'intéresse aux régimes *dynamiques* caractérisant leur exploitation dans le cas général. D'un point de vue thermodynamique, les transformations qui en résultent sont d'autant plus difficiles à appréhender qu'elles s'opèrent a priori hors d'équilibre. Le deuxième postulat ne s'appliquant plus (cf. section 3.1), l'état du système ne peut plus alors être décrit au moyen des

seuls paramètres externes associés à la position des corps environnants. Il convient en particulier de distinguer les forces internes (éventuellement conservatives) des forces appliquées par les sources au niveau des degrés de liberté observables du système. Cette différence tient, d'une part, au travail des forces généralisées de dissipation que l'on ne peut plus négliger pour des vitesses (généralisées) de valeur significative et, d'autre part, à l'intervention des forces d'inertie généralisées.

La caractérisation des phénomènes dissipatifs reste par principe une opération délicate (cf. section 2.3.5). Moyennant certaines hypothèses, on pourra toutefois chercher à « globaliser » leurs effets au niveau des degrés de liberté macroscopiques grâce à l'introduction de coefficients appropriés (coefficient de frottement, résistance ohmique, etc.).

Quant aux termes d'inertie généralisée, ils suggèrent que le principe de minimum régissant l'équilibre dynamique du système repose sur une fonctionnelle énergétique englobant non seulement son énergie potentielle (ou un potentiel thermodynamique qui en dérive), mais également l'énergie cinétique qu'il renferme. Telle est précisément la nature de la *fonction de lagrange L* introduite au chapitre 2. Ainsi, à l'instar des raisonnements développés pour établir les équations de l'élastodynamique (cf. § 2.3.3) et de l'électromagnétisme (cf. § 2.3.4), la dynamique couplée des systèmes électro-magnéto-mécaniques pourra être logiquement déduite du *principe de moindre action.*

Sans entrer dans les détails de ce vaste sujet [**45**] [**3**], on peut néanmoins en examiner les principaux résultats en se limitant au cas de systèmes macroscopiques *à constantes localisées*, i.e. dont le comportement macroscopique est décrit au moyen de variables globales (par opposition aux systèmes à constantes *réparties* généralement étudiés sous les hypothèses des milieux continus).

En vertu du principe général énoncé au paragraphe 2.3.1, la dynamique d'un système quelconque, décrit au moyen de n degrés de liberté rapportés aux coordonnées généralisées q^λ, est régie par les équations de Lagrange formulées par (équations 2.34) :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0 \quad \lambda \in \{1, \ldots, n\} \tag{3.54}$$

Pour les dispositifs qui nous intéressent, les coordonnées q^λ sont associées, s'agissant des degrés de liberté « mécaniques », aux variables de position (« x » ou « α ») qui repèrent de manière univoque la position des corps mobiles. Si l'on adopte la convention « électrostatique » précisée dans le tableau 3.2, c'est la charge électrique (q_c) qui joue le rôle d'une coordonnée généralisée dans le cas d'un degré de liberté « électromagnétique ». La vitesse généralisée correspondante n'est autre que le courant ($i = \dot{q}_c$).

Quant à la fonction de Lagrange L, il ressort des considérations initialement développées dans le contexte de la mécanique (cf. section 2.3.1) que son expression se construit de manière générale comme la différence des énergies cinétique ($\mathcal{E}_c$) et

potentielle ($\mathcal{E}_{\mathrm{p}}$) mises en jeu. Pour un dispositif incluant des degrés de liberté électromagnétiques, il convient donc d'étendre le sens de ces notions. Ainsi, dans le cadre de la convention retenue, l'énergie électrostatique contribuera (de même que l'énergie élastique)à une *énergie potentielle généralisée* $V(q)$ dont la différentielle correspond au terme $dV = f_\lambda(q)\,dq^\lambda$ (cf. tableau 3.2). L'énergie magnétostatique (comme l'énergie stockée dans le mouvement macroscopique des corps matériels) sera comptabilisée quant à elle en terme d'une *énergie cinétique généralisée* $T(q, p)$. La variation de cette quantité s'exprime par la différentielle $dT = \dot{q}^\lambda(q, p)\,dp_\lambda$. A noter que, en vertu de cette dernière définition, l'énergie cinétique généralisée apparaît comme une fonction de l'impulsion généralisée p_λ (le flux φ pour un degré de liberté électromagnétique) et non de la vitesse généralisée $\dot{q}^\lambda$ (respectivement l'intensité du courant i). Or, le lagrangien L est, par définition, une fonction des coordonnées q^λ, des vitesses $\dot{q}^\lambda$, et éventuellement du temps t (si le système n'est pas conservatif). Par conséquent, la fonction de Lagrange s'écrira de manière générale (pour un système conservatif) :

$$L(q, \dot{q}) = T^*(q, \dot{q}) - V(q) \tag{3.55}$$

où $T^* = \dot{q}^\lambda p_\lambda - T$ désigne la *coénergie cinétique généralisée* (la différentielle $dT^* = p_\lambda(q, p)\,d\dot{q}^\lambda$ établit bien cette grandeur comme une fonction des vitesses généralisées).

Notons que cette définition n'est pas en contradiction avec la formule (2.30) précédemment postulée dans le cas d'un système mécanique. Dans ce domaine en effet, les relations unissant quantité de mouvement et vitesse correspondent à des lois linéaires, si bien que les termes d'énergie et de coénergie cinétiques se confondent[(1)]. Il n'en va pas nécessairement de même dans le cas d'un degré de liberté électromagnétique. La présence d'une non-linéarité dans la loi flux-courant impose en effet de distinguer les termes d'énergie cinétique $\left(\int i\,d\varphi\right)$ et de coénergie cinétique généralisées $\left(\int \varphi\,di\right)$. Ces termes s'identifient respectivement à l'énergie et à la coénergie magnétique (cf. section 3.4.2).

D'autre part, connaissant les lois $f_\lambda(q)$ donnant les forces généralisées en fonction des coordonnées, la détermination du potentiel V revient à intégrer la forme différentielle $dV = f_\lambda(q)\,dq^\lambda$ le long d'un chemin reliant l'état de référence (par exemple le point origine de l'espace de configuration) et l'état courant associé au vecteur $\left(q^1, q^2, \ldots, q^n\right)$. Or, le système étant conservatif, le potentiel $V(q)$ est une fonction d'état, si bien que sa variation entre deux configurations données est indépendante du chemin suivi. Par conséquent, l'intégrale donnant V peut être évaluée

(1) L'identité est triviale pour une particule de masse m et de quantité de mouvement :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\ (dT = \mathbf{v}\cdot\mathbf{dp} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{dv} = dT^*).$$

le long d'un chemin judicieusement choisi, en procédant par exemple de la manière suivante :

$$V\left(q^1,q^2,\ldots,q^n\right)=\int_{0,0,\ldots,0}^{q^1,q^2,\ldots,q^n} f_\lambda\left(\tilde{q}^1,\tilde{q}^2,\ldots,\tilde{q}^n\right)d\tilde{q}^\lambda \tag{3.56}$$

$$=\int_{0,0,\ldots,0}^{q^1,0,\ldots,0} f_1\left(\tilde{q}^1,0,\ldots,0\right)d\tilde{q}^1+\int_{q^1,0,0,\ldots,0}^{q^1,q^2,0,\ldots,0} f_2\left(q^1,\tilde{q}^2,0,\ldots,0\right)d\tilde{q}^2$$

$$+\cdots+\int_{q^1,\ldots,q^{n-1},0}^{q^1,\ldots,q^{n-1},q^n} f_n\left(q^1,\ldots,q^{n-1},\tilde{q}^n\right)d\tilde{q}^n$$

Un raisonnement similaire peut être appliqué au calcul des intégrales définissant l'énergie et la coénergie cinétiques généralisées.

S'agissant enfin de la prise en compte des phénomènes de dissipation tels que le frottement mécanique où l'effet Joule, on peut baser le raisonnement sur le fait que, dans la majorité des cas, les forces généralisées attachées à ces phénomènes dépendent directement des vitesses généralisées. Ainsi, pour la catégorie de phénomènes tels que les forces de dissipation f_{R_λ} sont proportionnelles aux vitesses (cas du frottement visqueux ou des chutes de tension résultant de la loi d'ohm), il est possible de rendre compte de ces effets grâce à l'introduction dans le lagrangien d'un terme de coénergie cinétique généralisé « non-conservatif » (i.e. qui dépend explicitement du temps). Ce terme supplémentaire, noté T_R^*, est défini par :

$$T_R^*(\dot{q},t)=\int_0^t R(\dot{q})\,dt \tag{3.57}$$

où $R(\dot{q})$ désigne la *fonction de dissipation*, ou *fonction de Rayleigh*, définie par :

$$R(\dot{q})=\frac{1}{2}r_\lambda\left(\dot{q}^\lambda\right)^2 \tag{3.58}$$

et telle que :

$$f_{R_\lambda}=\frac{\partial R}{\partial\dot{q}^\lambda} \tag{3.59}$$

les constantes r_λ désignant les coefficients de dissipation associés à chaque degré de liberté.

Par conséquent, dans le cas d'un système électromécanique dissipatif, soumis à des forces conservatives intérieures f_λ et extérieures f_{e_λ}, dérivant respectivement des potentiels $V(q)$ et $V_e(q)$, ainsi qu'à des forces extérieures données $f_a(t)$ (imposées

par les sources), et dérivant par conséquent du potentiel $V_a(q,t) = -f_{a_\lambda}(t)\,q^\lambda$, le lagrangien prendra la forme générale :

$$L(q,\dot{q},t) = T^*(q,\dot{q}) + T_R^*(\dot{q},t) - V(q) - V_e(q) - V_a(q,t) \tag{3.60}$$

À titre d'illustration, le tableau 3.7 détaille les principales étapes de la mise en équation, à l'aide de cette méthode, du problème relatif à l'injecteur électromagnétique décrit au paragraphe 3.3.2.

Tableau 3.7 Mise en équation à l'aide du formalisme lagrangien de l'injecteur électromagnétique de carburant (cf. section 3.3.2)

	Degrés de liberté	**« mécanique » ($\lambda = 1$)**	**« électromagnétique » ($\lambda = 2$; convention « électrostatique »)**
Variables généralisées	q^λ $\dot{q}^\lambda$ p_λ f_λ f_{e_λ} $f_{a_\lambda}(t)$ f_{R_λ}	x $\dot{x}$ $p_x\ (= m\dot{x})$ $f_x\ (= k(x - x_0))$ $f_{e_x}\ (= mg)$ $f_{a_x}(t)$ $f_{R_x}\ (= \xi\dot{x})$ (ξ : coefficient de frottement visqueux)	$q^2\left(= \int i\,dt\right)$ i $\varphi\ (= li)$ $f_2 = 0$ $f_{e_2} = 0$ $v_a(t)$ $v_R\ (= ri)$ (r : résistance de la bobine)
Équations de Lagrange	$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} - \dfrac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0$	$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \displaystyle\int_0^t \xi\dot{x}\,dt \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{1}{2}i^2\left(\dfrac{dl}{dx}\right) \\ -k(x - x_0) + mg + f_{a_x} \end{cases}$ d'où l'équation « mécanique » : $m\ddot{x} + \xi\dot{x} + k(x - x_0) = mg + \dfrac{1}{2}i^2\left(\dfrac{dl}{dx}\right) + f_{a_x}$	$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial i} = l(x)\,i + \displaystyle\int_0^t ri\,dt \\ \dfrac{\partial L}{\partial q^2} = v_a \end{cases}$ d'où l'équation « électrique » : $l(x)\dfrac{di}{dt} + i\dfrac{dl}{dx}\dot{x} + ri = v_a$
Expression du lagrangien	$L\left(x,q^2,\dot{x},i,t\right) = T^*(x,\dot{x}) + T_R^*(\dot{x},i,t) - V(x) - V_e(x) - V_a\left(x,q^2,t\right)$ avec : $T^*(x,\dot{x}) = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}l(x)\,i^2$; $T_R^*(\dot{x},i,t) = \displaystyle\int_0^t \left(\dfrac{1}{2}\xi\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}ri^2\right)dt$; $V(x) = \dfrac{1}{2}k(x - x_0)^2$; $V_e(x) = -mgx$; $V_a\left(x,q^2,t\right) = -f_{a_x}(t)\,x - v_a(t)\,q^2$		

Remarquons que, dans le cas de figure étudié, le degré de liberté « électromagnétique » ne comporte aucun élément de stockage de nature électrostatique. Aussi, la

force généralisée f_2 est-elle nécessairement nulle. Si le circuit d'alimentation comportait un condensateur de capacité C_d placé en série avec la bobine, cette force généralisée s'identifierait alors à la tension capacitive $v_c = q_c/C_d$ développée aux bornes du condensateur.

Enfin, on doit ajouter que la présente formulation ne tient pas compte des « butées » mécaniques auxquelles l'équipage mobile est soumis au terme de sa course (entrée en contact des pièces polaires au niveau de l'entrefer, d'une part, et appui de l'aiguille sur son siège, d'autre part). Les non-linéarités majeures qu'engendrent ces contraintes supplémentaires demeurent par principe difficiles à prendre en compte dans les équations du système. Elles exigent l'introduction dans le modèle d'une représentation fine des phénomènes dynamiques intervenant au contact.

Concluons cette brève introduction à la théorie dynamique des systèmes électromécaniques en soulignant la portée du formalisme lagrangien pour établir, d'une manière sûre et systématique, les équations gouvernant le comportement dynamique des convertisseurs d'énergie. Fondée sur un principe à caractère universel, cette méthodologie s'applique sans a priori à des concepts et structures de conversion variés. En outre, s'agissant de problèmes à constantes distribuées qui, en général, n'admettent pas de solution analytique exacte, un avantage majeur de la méthode tient à la possibilité de raisonner sur une distribution approchée des champs mis en jeu. Le principe de minimum portant sur une fonctionnelle énergétique, les erreurs commises sur les grandeurs macroscopiques globales sont de ce fait minimisées. Aussi, au-delà des exemples d'actionneurs électromagnétiques considérés jusqu'à présent, le formalisme lagrangien sera avantageusement mis à profit, au chapitre 7, pour jeter les bases de la théorie des transducteurs piézoélectriques résonnants.

EXERCICES ET PROBLÈMES

3.1. Thermodynamique des corps ferromagnétiques

On considère un milieu aimanté supposé homogène et isotrope. Son état thermodynamique est caractérisé par les couples de variables conjuguées (Θ, Σ) et (H, J), représentant respectivement la température et l'entropie par unité de volume du corps, d'une part, l'intensité du champ d'excitation et de polarisation magnétiques, d'autre part.

a) Rappeler l'expression du travail nécessaire à la polarisation du milieu en régime quasistatique.

b) En déduire l'expression de la différentielle d'énergie interne volumique intrinsèque U définie en omettant le terme d'excitation du champ dans le vide.

c) Montrer que cette énergie constitue un potentiel thermodynamique par rapport aux variables Σ et J.

d) En déduire les conditions d'évolution spontanée, d'équilibre et de stabilité à entropie constante.

e) Montrer que, pour une transformation opérée à température Θ constante, il est judicieux d'introduire le potentiel $F = U - \Theta\Sigma$ correspondant à l'énergie libre.

f) En déduire l'expression du champ d'excitation H en fonction de F.

3.2. Modèle de Landau d'un milieu aimanté

Reprenant les hypothèses du problème précédent, on suppose que, pour une température sensiblement inférieure à la température de Curie Θ_c, l'énergie libre F se développe selon une expression de la forme :

$$F(\Theta, J) = F_0(\Theta) + a(\Theta - \Theta_c)\frac{J^2}{2} + b\frac{J^4}{4}$$

où F_0 représente l'énergie libre volumique à aimantation nulle, a et b désignant deux constantes positives.

a) Déterminer l'expression de la polarisation rémanente J_r à excitation nulle $(H = 0)$ et vérifier que son existence correspond à un équilibre stable pour $\Theta < \Theta_c$.

(Réponse : $J_r = \sqrt{\frac{a}{b}(\Theta_c - \Theta)}$)

b) Le corps étant soumis à une excitation H non nulle pour $\Theta < \Theta_c$, montrer que la loi isotherme $J(H)$ correspond à une courbe en S.

c) Faire apparaître les parties de ces courbes correspondant à des états stables et instables.

d) Le corps étant soumis à une excitation magnétique alternative d'amplitude H_0 suffisamment grande pour saturer le matériau, déduire de la question précédente une interprétation thermodynamique du phénomène d'hystérésis.

e) Déterminer alors l'expression du champ coercitif H_{c_J} en fonction des températures Θ, Θ_c et des coefficients a et b.

(Réponse : $|H_{c_J}| = \dfrac{2bJ_r^3}{3\sqrt{3}}$)

3.3. Bille magnétique en suspension

On considère un dispositif de suspension magnétique constitué d'un électroaimant en interaction avec une bille ferromagnétique de masse m. La bille se déplace selon un axe (Ox) de direction verticale orienté vers le bas. L'électroaimant est alimenté par une source appliquant à ses bornes une tension v_a donnée. Le champ de gravitation fait intervenir le potentiel extérieur $V_e(x) = -mgx$. On suppose d'autre que, le long de la course considérée, l'énergie libre stockée sous forme magnétique est définie par :

$$F_{\text{mag}}(x, \varphi) = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{l(x)} \quad \text{avec} \quad l(x) = l_0 + \frac{\alpha}{x}$$

où l_0 et α sont des constantes positives, φ désignant le flux magnétique embrassé par la bobine de l'électroaimant. On conviendra dans tout le problème de raisonner en termes de la convention électrostatique.

a) La bobine étant parcourue par un courant d'intensité i constante, déduire de la loi de conservation de l'énergie la condition d'équilibre de la bille ; montrer qu'il est judicieux d'introduire à cette fin un potentiel thermodynamique $G'_{\text{mag}} = F_{\text{mag}} + V_e - i\varphi$; prouver alors que l'équilibre est nécessairement instable.

b) Donner l'expression de la fonction de Lagrange associée au système.

(Réponse : $L(x, \dot{x}, t) = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}li^2 + mgx + v_a q_c$)

c) En déduire la loi du mouvement et l'équation électrique gouvernant le fonctionnement du système.

3.4. Énergie libérée par un aimant permanent

On considère un aimant permanent de forme cylindrique, dont la polarisation $\mathbf{J}$ supposée uniforme, est orientée perpendiculairement à son axe de révolution. Cet aimant est placé au centre d'un alésage de rayon a, délimité par une culasse de très forte perméabilité devant celle de l'air. La surface de l'aimant est séparée de celle de la culasse par un entrefer d'épaisseur e constante. On admet que le champ d'excitation $\mathbf{H}$ régnant dans l'entrefer, rapporté à un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dont l'axe polaire est orienté parallèlement à $\mathbf{J}$, est défini en termes de ses

composantes radiales et tangentielles par (cf. section 6.2.1) :

$$\begin{cases} H_r = \dfrac{1}{2\mu_0}(1-x_e)^2\left[1+\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\right] J\cos\theta \\ H_\theta = -\dfrac{1}{2\mu_0}(1-x_e)^2\left[1-\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\right] J\sin\theta \end{cases}$$

(pour $a - e < r < a$)

où $x_e = \dfrac{e}{a}$ désigne le coefficient d'entrefer relatif. On suppose que le système fonctionne à température constante.

a) Déterminer l'expression de la part d'énergie libre stockée dans l'entrefer.

(Réponse : $F_{\text{mag}} = \dfrac{\pi a^2 h J^2}{8\mu_0}\left[(1-x_e)^2 - (1-x_e)^6\right]$)

b) En déduire l'épaisseur e qui maximise, pour un rayon a donné, l'énergie libérée par l'aimant dans l'entrefer.

(Réponse : $x_e = 1 - \sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$)

Chapitre **4**

Interaction électromécanique

Les techniques opérationnelles de conversion électromécanique de l'énergie se sont très tôt focalisées sur l'exploitation quasi-exclusive d'effets électromagnétiques. Ainsi, depuis l'avènement de l'électricité en tant que vecteur d'énergie, les lois de la magnétostatique et de l'induction électromagnétique règnent sans partage sur le monde des machines électriques tournantes pour assurer la production de l'électricité ou sa transformation en mouvement. Il n'en demeure pas moins que d'autres phénomènes physiques existent qui sont a priori susceptibles de concourir à une telle transformation. Certes, dotées le plus souvent de performances relativement modestes, ces alternatives à la « filière électromagnétique » sont longtemps restées l'apanage de secteurs d'application spécifiques (tels que les capteurs ou celui des transducteurs par exemple). Or, les progrès récemment accomplis dans le monde des matériaux, s'agissant en particulier des composés « électroactifs » (céramiques et polymères piézoélectriques, alliages à mémoire de forme, etc.), conduisent peu à peu à considérer sous un jour nouveau les procédés de conversion qui en découlent. Aussi, sans remettre en cause le monopole des machines électromagnétiques dans le domaine des fortes et moyennes puissances, on ne saurait ignorer aujourd'hui l'enjeu majeur que représentent ces nouvelles filières technologiques en termes de « microsystèmes », « d'intégration mécatronique » ou encore de « structures adaptatives ».

Prélude à la description des principales structures de convertisseurs opérationnels (chapitres 5 et 7), le présent chapitre propose un tour d'horizon des phénomènes d'interaction susceptibles d'être utilisés dans les machines, actionneurs et systèmes électroactifs modernes. Sur la base de considérations thermodynamiques directement déduites de la partie précédente, les principales classes d'effets sont tout d'abord identifiées. Les procédés fondés sur l'interaction électromagnétique sont ensuite détaillés,

en distinguant les couplages opérés par interaction de champs statiques des effets électrodynamiques liés au mouvement relatif des sources ou à leur variation dans le temps. La conception relativiste des lois de l'électromagnétisme, telles que formulées au chapitre 2, est alors directement mise à profit. Les processus d'interaction basés sur le couplage des propriétés élastiques et électromagnétiques de la matière sont ensuite examinés, avant que d'autres formes d'interaction (effets électro-thermo-élastiques ou couplages électromagnétiques dans les milieux fluides) ne soient par ailleurs discutées. La comparaison des divers procédés en terme d'énergie spécifique permet enfin de situer globalement leurs champs d'application privilégiés.

4.1 CLASSIFICATION DES PRINCIPAUX EFFETS

4.1.1 Approche phénoménologique

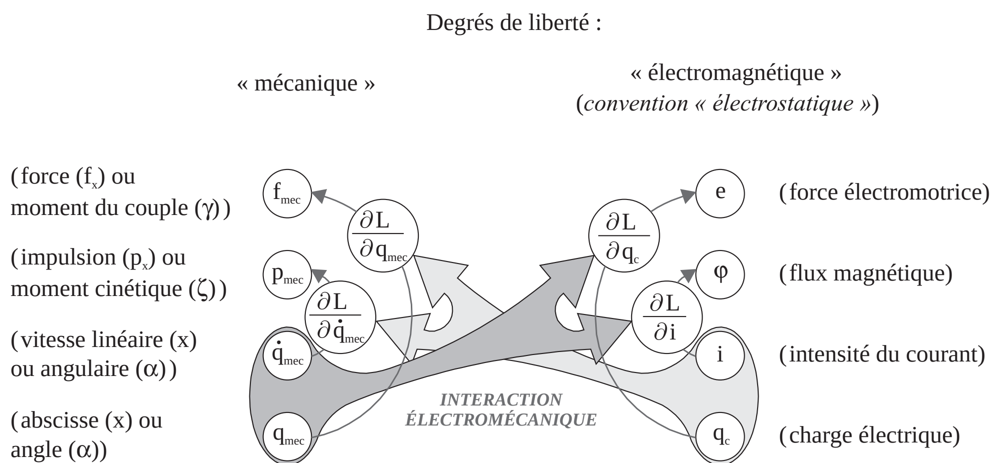


Figure 4.1 Diagramme schématique de l'interaction électromécanique entre deux degrés de liberté « électromagnétique » et « mécanique »

Du point de vue thermodynamique, la mise en jeu d'un processus d'*interaction électromécanique* suppose une interdépendance des paramètres macroscopiques de nature électromagnétique et mécanique. Cette interdépendance se traduit formellement par la présence de termes de couplage dans le développement de la fonction d'état énergétique qui caractérise le système. Dans le cas général d'un dispositif électro-magnéto-mécanique pour lequel l'énergie est a priori conjointement stockée sous forme d'énergies potentielle et cinétique généralisées (cf. section 3.5), il s'agit par conséquent d'examiner l'expression de la fonction de Lagrange qui décrit son comportement électrodynamique. On peut en première approche se limiter aux phénomènes d'*interaction linéaire*. Le lagrangien se développe alors selon une forme

quadratique des coordonnées et des vitesses généralisées (les forces et les impulsions s'expriment linéairement en fonction de ces mêmes variables). La possibilité d'un couplage électromécanique entre deux degrés de liberté implique l'existence de termes « mixtes », construits à partir de variables généralisées mécaniques (q_{mec} ou $\dot{q}_{\mathrm{mec}}$) et électromagnétiques (charge q_c ou courant i, dans le cadre d'une convention de type « électrostatique »). Comme l'illustre le diagramme schématique de la figure 4.1, la présence de tels termes conduit à ce que les forces ou impulsions mécaniques, obtenues respectivement par dérivation du lagrangien par rapport aux variables de position et de vitesse, dépendent des coordonnées ou des vitesses généralisées électromagnétiques (charge ou courant). Réciproquement, du fait de ces mêmes termes, la force électromotrice ou le flux magnétique attachés à un degré de liberté électromagnétique seront fonction des coordonnées ou des vitesses mécaniques.

Un raisonnement purement phénoménologique, portant sur l'analyse systématique des formes possibles pour l'expression du lagrangien, permet ainsi de prévoir les divers phénomènes physiques établissant un lien direct entre les mondes de l'électricité et de la mécanique [**49**].

4.1.2 Principales classes de processus d'interaction

Les considérations précédentes amènent à distinguer deux grandes classes de phénomènes d'interaction électromécanique :

➤ Les processus d'interaction *monovalente* résultent d'un « paramétrage mécanique » de l'énergie stockée sous forme électromagnétique (termes en $k\,(q_{\mathrm{mec}})\,q_{c_\lambda}q_{c_\mu}$ ou $k\,(q_{\mathrm{mec}})\,i_\lambda i_\mu$).

Tel est le cas des interactions par couplage *électrique* ou *magnétique*. La partie du lagrangien spécifiquement dédiée au couplage monovalent (i.e. à l'exclusion des éventuels potentiels externes et de l'énergie cinétique mécanique) fait appel à un terme unique. Celui-ci se rapporte soit à l'énergie électrostatique (énergie potentielle généralisée), soit à l'énergie magnétostatique (énergie cinétique généralisée) accumulée par le dispositif. L'existence d'un couplage à l'échelle *globale* suppose alors que ce terme d'énergie soit paramétré en fonction d'une variable mécanique (q_{mec}) caractéristique de la *configuration géométrique* du système. Remarquons que la mise en jeu de ce paramètre macroscopique (ouverture d'un entrefer, décalage angulaire entre deux pôles, etc.) n'implique nullement l'intervention d'un quelconque mode de stockage de l'énergie sous forme mécanique (en régime quasi-statique tout au moins). Comme l'illustre le tableau 4.1, les effets électromécaniques réciproques constituant cette première classe de procédés se manifestent, d'une part, entre des conducteurs chargés et/ou des diélectriques polarisés, et d'autre part, entre des circuits parcourus par des courants et/ou des corps aimantés. Déclinés selon une grande variété de concepts et de structures (cf. chapitre 5), ces effets tiennent une place centrale dans les applications de l'électrodynamique. Leur étude détaillée fait l'objet des sections 4.2 et 4.3.

➤ Les processus d'interaction *divalente* reposent sur le couplage de deux formes d'énergie (électromagnétique et mécanique) qui s'exprime dans le lagrangien sous la forme d'un terme mixte bilinéaire (en $q_{\text{mec}}q_c$, $q_{\text{mec}}i$ ou $\dot{q}_{\text{mec}}i$).

Tableau 4.1 Interaction électromécanique « monovalente » (énergie stockée sous une seule forme)

Type d'interaction et effets associés	Exemple de base et forme du lagrangien correspondant
Couplage « électrique » **Effet direct :** actions mécaniques subies par des diélectriques polarisés et/ou des conducteurs chargés **Effet inverse :** variation de charge ou de potentiel résultant du déplacement des sources du champ	$L\left(x, q_{c_1}, q_{c_2}\right) = -\frac{1}{2}d_{11}q_{c_1}^2 - d_{12}(x)\, q_{c_1}q_{c_2} - \frac{1}{2}d_{11}q_{c_2}^2$ ($d_{\lambda\mu}$: coefficients d'influence inverse)
Couplage « magnétique » **Effet direct :** actions mécaniques subies par des corps aimantés et/ou des conducteurs parcourus par des courants **Effet inverse :** forces électromotrices induites par le mouvement relatif des sources du champ	$L\left(\alpha, i_1, i_2\right) = \frac{1}{2}l_{11}i_1^2 + l_{12}(\alpha)\, i_1 i_2 + \frac{1}{2}l_{22}i_2^2$ ($l_{\lambda\mu}$: coefficients d'inductance)

Sont ainsi rattachés à cette deuxième classe les phénomènes de couplage *électro-élastique* ou *magnéto-élastique*. L'interaction repose ici sur un processus à caractère *local*, responsable d'une interdépendance des grandeurs caractérisant les propriétés élastiques de la matière et son état électrique ou magnétique.

Tableau 4.2 Interaction électromécanique « divalente » (énergie stockée sous deux formes)

Type d'interaction et effets associés	Exemple de base et forme du lagrangien correspondant
Couplage « électro-élastique » **Effet direct :** déformation d'un diélectrique soumis à un champ électrique (effet piézoélectique inverse) **Effet inverse :** polarisation d'un diélectrique soumis à une contrainte mécanique (effet piézoélectique direct)	$L\left(x, q_{c_1}, q_{c_2}\right) = -\frac{1}{2}dq^2 - h_{pe}q_cx - \frac{1}{2}kx^2$ (h_{pe} : constante piézoélectrique ; k : coefficient de raideur)
Couplage « magnéto-élastique » **Effet direct :** déformation d'un corps aimanté soumis à un champ magnétique (effet piézomagnétique inverse) **Effet inverse :** aimantation d'un corps magnétique soumis à une contrainte mécanique (effet piézomagnétique direct)	$L(x, i) = \frac{1}{2}li^2 - h_{pm}ix - \frac{1}{2}kx^2$ (h_{pm} : constante piézomagnétique)
Couplage « gyromagnétique » **Effet direct :** mise en rotation d'un corps magnétique lors de son aimantation (effet Einstein-de Haas) **Effet inverse :** aimantation d'un corps magnétique entraîné en rotation (effet Barnett)	$L(\dot{\alpha}, i) = \frac{1}{2}\mathfrak{I}\dot{\alpha}^2 + \lambda_{gm}\dot{\alpha}i + \frac{1}{2}li^2$ ($\mathfrak{I}$: moment d'inertie ; λ_{gm} : constante gyromagnétique)

Dans le cas linéaire, ce couplage a trait aux phénomènes de *piézoélectricité* et de *piézomagnétisme* illustrés dans le tableau 4.2. Pour un corps macroscopique, ces phénomènes se traduisent par une relation linéaire entre la différence de potentiel (piézoélectricité) ou le flux magnétique (piézomagnétisme) et la coordonnée globale

repérant la déformation du corps. Réciproquement, la force mécanique comporte, outre sa partie purement élastique, un terme proportionnel aux variables qui gouvernent la polarisation du milieu (respectivement la charge électrique ou le courant). Ces questions seront examinées de manière plus approfondie à la section 4.4 à partir d'une approche macroscopique locale. L'exploitation pratique de ces phénomènes en conversion électromécanique de l'énergie fait l'objet du chapitre 7.

Enfin, d'un point de vue formel, on peut inclure dans la catégorie des processus d'interaction divalente les phénomènes résultant d'un couplage entre l'énergie cinétique de rotation d'un corps magnétique et son énergie magnétostatique. On observe en effet pour certaines substances (non ferromagnétiques) une loi linéaire entre l'aimantation et la vitesse de rotation[(1)]. Ce lien se traduit expérimentalement par des effets *gyromagnétiques* réciproques connus sous les noms d'effets Barnett (aimantation d'un corps magnétique entraîné en rotation) et Einstein-de Haas (mise en rotation du corps lors de son aimantation). La valeur des constantes gyromagnétiques étant très faible en pratique, la portée de ces effets en matière de conversion d'énergie demeure à ce jour essentiellement théorique.

4.2 SOURCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES EN INTERACTION STATIQUE

4.2.1 Dipôle permanent plongé dans un champ constant

En vue de caractériser les effets électromécaniques qui résultent d'un couplage « électrique » ou « magnétique » en régime statique, on peut dans un premier temps s'intéresser aux actions mécaniques élémentaires subies par un petit corps d'épreuve polarisé lorsqu'il est placé dans un *champ stationnaire*. On suppose que la polarisation du corps est *permanente*, tandis que le champ avec lequel il interagit est imposé au moyen de sources extérieures. Conformément aux résultats obtenus au chapitre 2 (cf. § 2.4.6), la détermination des efforts mécaniques peut être effectuée en intégrant le tenseur de Maxwell sur une surface englobant le corps. Ceci suppose néanmoins de bien connaître la distribution spatiale du champ le long de cette surface. Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, il est également possible de déduire d'un raisonnement énergétique les forces s'exerçant sur le corps polarisé.

Considérons le cas d'un petit *aimant permanent* uniformément polarisé, obéissant à une loi constitutive de la forme $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}+\mathbf{J}_p$ (avec $\mathbf{J}_p$ constant). Les sources « données » à l'origine du champ extérieur imposent un champ d'excitation $\mathbf{H}_{\text{ext}}\,(M)$ dont la distribution est supposée stationnaire. On sait de manière générale (cf. § 3.4.2) que l'énergie potentielle d'origine magnétostatique associée à une transformation

(1) On peut souligner la légitimité d'une telle relation d'un point de vue tensoriel. En effet, l'aimantation ($\mathbf{M}$) et la vitesse de rotation (Ω) constituent toutes deux des grandeurs pseudovectorielles de l'espace tridimensionnel qui se rapportent plus généralement à des tenseurs antisymétriques d'ordre 2.

isotherme opérée à excitation magnétique constante correspond à l'*enthalpie libre magnétostatique* définie par (3.40). Dans ce potentiel, seule nous intéresse la part strictement associée au couplage entre le champ extérieur et l'aimant. Il est en effet inutile de tenir compte ici des termes « propres » liés à l'établissement du champ extérieur en l'absence d'aimant ou à la polarisation initiale de ce dernier. L'*enthalpie d'interaction* se réduit donc à l'intégrale :

$$G_{\text{mag}}^{(int)} = -\int_{(V_c)} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{H}_{\text{ext}}} J_{p_i} \, dH_i \, dv = -\int_{(V_c)} J_{p_i} H_{\text{ext}_i} \, dv \tag{4.1}$$

où (V_c) désigne le volume du corps aimanté.

Si ce volume est suffisamment petit, le champ $\mathbf{H}_{\text{ext}}(M)$ peut être considéré comme uniforme à l'intérieur de l'aimant. En introduisant son *moment magnétique* $\mathbf{m}_p$ défini par (cf.§ 2.2.1) :

$$\mathbf{m}_p = \frac{1}{\mu_0} \int_{(V_c)} \mathbf{J}_p dv \tag{4.2}$$

on obtient finalement pour l'enthalpie d'interaction :

$$G_{\text{mag}}^{(int)} = -\mu_0 m_{p_i} H_{\text{ext}_i}(M) \tag{4.3}$$

ou encore, sous forme vectorielle :

$$G_{\text{mag}}^{(int)} = -\mu_0 \mathbf{m}_p \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}}(M) \tag{4.4}$$

Cette grandeur représente l'énergie potentielle du *dipôle magnétique permanent*, localisé au point M, plongé dans un champ extérieur donné.

En vertu du rôle symétrique que jouent les grandeurs magnétiques $(\mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{B})$ et électriques $(\mathbf{E}, \mathbf{P}, \mathbf{D})$ dans les relations énergétiques ainsi que dans les équations du champ électromagnétique, on déduira d'un raisonnement en tout point similaire l'expression de « l'enthalpie libre électrostatique » d'un dipôle électrique permanent, de moment $\mathbf{p}_p \left(= \int \mathbf{P}_p dv\right)$, placé dans un champ électrique $\mathbf{E}_{\text{ext}}(M)$ constant. Il vient ainsi :

$$G_{\text{elec}}^{(int)} = -p_{p_i} E_{\text{ext}_i}(M) \tag{4.5}$$

4.2.2 Cas du dipôle polarisable

Si le corps d'épreuve est constitué d'un milieu polarisable, le calcul précédent n'est plus valable car la polarisation (électrique ou magnétique) dépend des caractéristiques du champ au point considéré. L'intégration selon les composantes de **H** (ou **E**) requiert par conséquent la connaissance de la loi constitutive exprimant la polarisation en fonction du champ.

L'étude énergétique est alors d'autant plus difficile à mener que la réponse du milieu obéit fréquemment à une loi *non-linéaire* (cf. §2.3.5). Cette difficulté intervient de manière très marquée dans les corps ferroélectriques ou ferromagnétiques. Leurs propriétés, largement exploitées dans la pratique, sont parmi les plus intéressantes en terme de polarisabilité. D'autre part, un deuxième écueil concerne la prise en compte de l'*anisotropie* qui joue souvent un rôle déterminant dans les mécanismes de polarisation induite. Cette anisotropie, d'origine microscopique (structure de l'édifice cristallin) ou géométrique (forme de l'échantillon), se traduit à l'échelle macroscopique par la présence d'un axe de « facile polarisation ». Cet axe constitue la direction privilégiée selon laquelle le moment induit s'aligne préférentiellement à l'intérieur du corps. Nous verrons au chapitre 5 que le principe de fonctionnement d'une certaine classe de machines électromagnétiques tournantes repose précisément sur l'exploitation de cette propriété.

Sans trop restreindre la généralité, on peut néanmoins admettre en première approche que la loi gouvernant la polarisation de notre petit corps d'épreuve anisotrope est linéaire. Le milieu qui le constitue est alors caractérisé par un tenseur symétrique de susceptibilité électrique $\left(\chi_{e_{ik}}\right)$ ou magnétique $\left(\chi_{m_{ik}}\right)$ dont les coefficients, à température donnée, sont des constantes. Ces constantes peuvent être soit positives (milieux paraélectriques ou paramagnétiques), soit négatives (milieux diamagnétiques). S'agissant des milieux ferroélectriques ou ferromagnétiques, on pourra, moyennant quelques précautions, décrire qualitativement les effets qui les concernent en assimilant leur réponse à une loi linéaire (cf. figure 2.4). Ces matériaux seront formellement rattachés à la classe des milieux à susceptibilité constante positive(1). Ceci suppose, s'agissant d'un matériau doux, que l'intensité du champ appliqué soit suffisamment grande pour assurer une polarisation de même sens que l'excitation, et suffisamment faible pour rester en deça des zones de saturation du milieu.

Dans ces conditions, la partie de l'enthalpie liée au phénomène d'interaction entre le corps et le champ appliqué s'exprime par (dans le cas magnétique) :

$$G_{\text{mag}}^{(int)} = -\int_{(V_c)} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} J_{\chi_i}\left(\mathbf{H}\right) dH_i \, dv \tag{4.6}$$

où la polarisation magnétique induite J_{χ_i} est assujettie à une loi constitutive linéaire de la forme :

$$J_{\chi_i} = \chi_{m_{ik}} H_k \tag{4.7}$$

Il convient de noter que le champ H_k figurant dans cette loi représente le *champ d'excitation total*, somme du champ extérieur appliqué $(\mathbf{H}_{\text{ext}})$ et du champ d'origine intérieure $\left(\mathbf{H}_\chi\right)$. Ce dernier résulte de la polarisation du corps lui-même et possède, comme en témoigne la figure 4.2, un caractère « démagnétisant ». On montre à partir

(1) On doit cependant garder à l'esprit que la susceptibilité de ces matériaux dépasse de plusieurs ordres de grandeur celle des corps paraélectriques ou paramagnétiques.

des équations de la magnétostatique que $\mathbf{H}_\chi$ dépend linéairement de $\mathbf{J}_\chi$, le coefficient de proportionnalité étant directement fonction de la géométrie du corps. Nous aurons l'occasion de vérifier au chapitre 6.1 qu'un cylindrique uniformément polarisé est le siège d'un champ interne uniforme donné par $\mathbf{H}_\chi = -\mathbf{J}_\chi/2\mu_0$ (dans le cas d'une sphère, le coefficient de champ démagnétisant est égal à $-1/3$).

Dès lors, en tirant parti de la symétrie du tenseur de susceptibilité, l'intégrale initiale se met sous la forme :

$$G_{\text{mag}}^{(int)} = -\int\limits_{(V_c)} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} \chi_{m_{ik}} H_k dH_i \, dv = -\frac{1}{2} \int\limits_{(V_c)} \chi_{m_{ik}} H_k H_i \, dv \tag{4.8}$$

soit, en se limitant aux termes strictement liés à l'interaction du corps avec le champ extérieur :

$$G_{\text{mag}}^{(int)} = -\frac{1}{2} \int\limits_{(V_c)} J_{\chi_i} H_{\text{ext}_i} \, dv \tag{4.9}$$

L'enthalpie d'interaction pour un dipôle polarisable linéaire de moment $\mathbf{m}_\chi$ revient donc à l'expression (4.3) affectée du coefficient $\dfrac{1}{2}$:

$$G_{\text{mag}}^{(int)} = -\frac{1}{2}\mu_0 m_{\chi_i} H_{\text{ext}_i} \tag{4.10}$$

Les champs mis en jeu dépendant linéairement les uns des autres, le moment induit peut être directement exprimé en fonction du champ extérieur, ce qui permettra de mettre l'enthalpie sous la forme :

$$G_{\text{mag}}^{(int)} = -\frac{1}{2}\mu_0 \varkappa_{m_{ik}} H_{\text{ext}_k} H_{\text{ext}_i} \tag{4.11}$$

ou $\varkappa_{m_{ik}}$ représente la susceptibilité macroscopique du dipôle définie par :

$$m_{\chi_i} = \varkappa_{m_{ik}} H_{\text{ext}_k}$$

($\varkappa_{m_{ik}}$ ne doit pas être confondue avec la susceptiblité $\chi_{m_{ik}}$ du milieu définie par rapport au champ total).

4.2.3 Torseur des actions dipolaires élémentaires

D'un point de vue thermodynamique, la minimisation des enthalpies libres d'interaction électrostatique ou magnétostatique détermine les positions d'équilibre stable occupées par le dipôle évoluant en régime quasistatique dans un champ électromagnétique dont les composantes $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{H}$ sont imposées (cf. §3.4.1). Il convient a priori de distinguer deux types d'interaction, selon que l'on a affaire à un dipôle permanent ou polarisable.

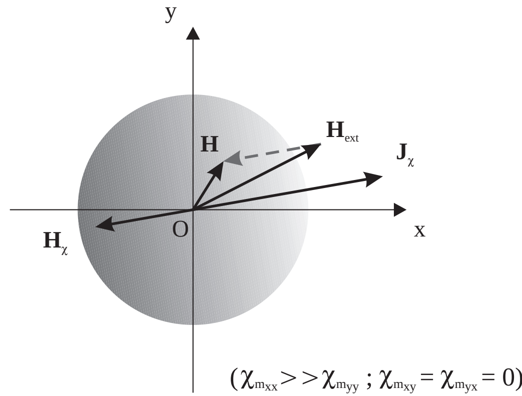


Figure 4.2 Diagramme des champs régissant la polarisation induite au sein d'un corps aimanté linéaire anisotrope (cas d'un milieu à susceptibilité positive)

a) Cas du dipôle permanent

Nous raisonnerons sans restreindre la généralité sur un dipôle aimanté, étant entendu que les conclusions obtenues pour un corps électriquement polarisé se déduisent du cas magnétique en remplaçant respectivement **m** par **p** et **H** par **E**. La minimisation de (4.3) revient, d'après les résultats précédemment obtenus, à maximiser le produit scalaire $\mathbf{m}_p \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}}$. Ceci implique que le corps tende spontanément à aligner son moment dans la direction du champ tout en cherchant à dériver vers les zones :

– d'intensité de champ élevée, si son orientation à même sens que celle du champ ($\mathbf{m}_p \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}} > 0$) ;
– d'intensité de champ faible dans le cas contraire.

Ainsi, comme l'illustre la figure 4.3, les actions élémentaires subies par le dipôle de la part du champ se réduisent à une *force résultante* **f** (translation dans le champ) et un *couple* de moment γ (rotation dans la direction du champ). Les éléments de ce torseur dynamique s'obtiennent simplement en dérivant l'enthalpie libre d'interaction par rapport aux variables de position qui paramètrent les degrés de liberté considérés (cf. §3.4.3).

➤ Degré de liberté de *translation* :

La variation élémentaire de l'enthalpie magnétostatique (4.3) s'écrit :

$$dG_{\text{mag}}^{(int)} = -\mu_0 m_{p_i} \frac{\partial H_{\text{ext}_i}}{\partial x_k} dx_k \qquad (4.12)$$

où les coordonnées x_k repèrent la position dans le champ du point (M) où le dipôle est localisé.

Cette variation d'enthalpie n'est autre que le travail de la force mécanique extérieure f_{a_k} qui équilibre, en régime quasi-statique, la force f_k exercée par le champ

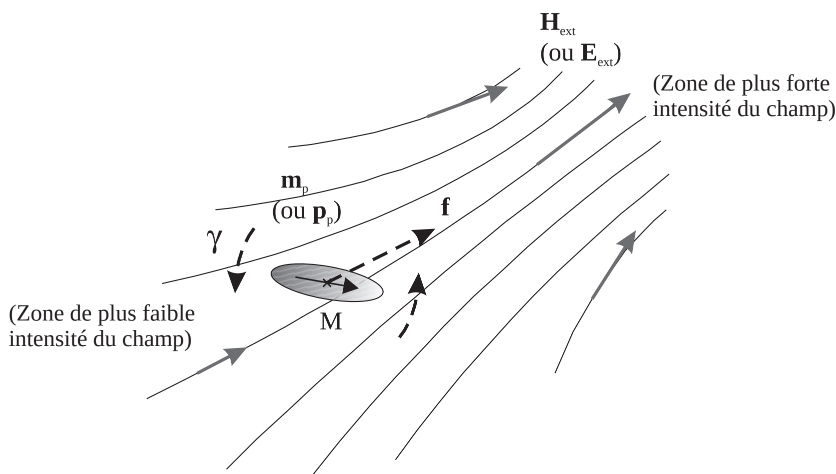


Figure 4.3 Force résultante et couple subis par un dipôle dans un champ extérieur imposé

sur le dipôle. Il vient par conséquent pour cette dernière :

$$f_k = -f_{a_k} = \mu_0 m_{p_i} \frac{\partial H_{\text{ext}_i}}{\partial x_k} \tag{4.13}$$

Le moment permanent m_{p_i} est invariable durant son déplacement, si bien que l'on peut aussi écrire :

$$f_k = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(m_{p_i} H_{\text{ext}_i} \right) \tag{4.14}$$

soit encore, sous forme vectorielle :

$$\mathbf{f} = \mu_0 \mathbf{grad} \left(\mathbf{m}_p \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}} \right) \tag{4.15}$$

Remarquons que, dans le cas particulier d'un champ uniforme, le gradient de $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ est nul en tout point de l'espace. Le dipôle ne subit alors aucune force résultante de la part du champ.

➤ Degré de liberté de *rotation* :

L'enthalpie libre magnétostatique varie, au cours d'un déplacement élémentaire, de la quantité :

$$dG_{\text{mag}}^{(int)} = -\mu_0 dm_{p_j} H_{\text{ext}_j} \tag{4.16}$$

Or, si l'on se réfère aux résultats classiques de cinématique du solide (voir annexes A.3.4 et A.3.5), la variation de moment dm_{p_j} résultant d'une rotation infinitésimale du vecteur m_{p_j} se formule à l'aide du tenseur de rotation par :

$$dm_{p_j} = \epsilon_{ijk} \, d\alpha_k \, m_{p_i} \tag{4.17}$$

où ϵ_{ijk} désigne le symbole d'antisymétrie et $d\alpha_k$ les angles de rotation élémentaires autour des trois axes du repère (orthonormé).

On obtient donc pour la variation d'enthalpie libre :

$$dG_{\text{mag}}^{(int)} = -\mu_0 \epsilon_{ijk} m_{p_i} H_{\text{ext}_j} d\alpha_k = -\gamma_k d\alpha_k \tag{4.18}$$

Par conséquent, le moment du couple γ_k qu'exerce le champ extérieur H_{ext_j} sur le dipôle est donné par :

$$\gamma_k = \mu_0 \epsilon_{ijk} m_{p_i} H_{\text{ext}_j} \tag{4.19}$$

ce que l'on écrit classiquement sous la forme du produit vectoriel :

$$\gamma = \mu_0 \mathbf{m}_p \wedge \mathbf{H}_{\text{ext}} \tag{4.20}$$

b) Cas du dipôle polarisable linéaire

Outre la variation d'enthalpie liée au gradient du champ extérieur, il y a lieu de tenir compte, pour le dipôle polarisable, de la variation de moment qu'entraîne son déplacement dans le champ.

➤ Dipôle en *translation* :

La différentielle de l'enthalpie (4.10) comporte deux termes qui s'écrivent, dans le cas linéaire :

$$dG_{\text{mag}}^{(int)} = -\frac{1}{2}\mu_0 \left(\varkappa_{m_{il}} \frac{\partial H_{\text{ext}_l}}{\partial x_k} H_{\text{ext}_i} + \varkappa_{m_{il}} \frac{\partial H_{\text{ext}_i}}{\partial x_k} H_{\text{ext}_l} \right) dx_k \tag{4.21}$$

en notant que le tenseur de suceptibilité $\varkappa_{m_{il}}$ ne varie pas au cours d'un déplacement du moment parallèlement à lui-même. Or, ce tenseur étant supposé symétrique, les deux termes au second membre de (4.21) sont égaux. L'expression (4.13) de la force trouvée pour le dipôle permanent reste donc valable. On écrira de même :

$$f_k = \mu_0 m_{\chi_i} \frac{\partial H_{\text{ext}_i}}{\partial x_k} \tag{4.22}$$

➤ Dipôle en *rotation* :

Il convient de remarquer que, dans le référentiel du champ (auquel toutes les variations ont été rapportées jusqu'à présent), la loi constitutive du milieu est affectée par son déplacement mécanique. La susceptibilité $\chi_{m_{ik}}$ est en effet définie dans un référentiel où la matière est au repos. Afin de contourner cette difficulté, on évaluera la variation d'énergie potentielle dans un référentiel lié au dipôle. Ce procédé est parfaitement légitime dans la mesure où l'enthalpie, à l'instar des grandeurs énergétiques, constitue un invariant scalaire[(1)]. La rotation du dipôle d'un angle $d\alpha_k$ dans le repère

---

(1) Si l'on ne sacrifiait pas à l'usage consistant à placer systématiquement les indices au bas des lettres support, lorsque le repère est orthonormé, l'expression de l'enthalpie devrait être notée en toute rigueur $G_{\text{mag}}^{(int)} = -\mu_0 m_i H_{\text{ext}}^i$, ce qui ferait alors explicitement apparaître sa qualité d'invariant scalaire (voir annexe A.2.2).

du champ se traduit par une rotation du champ de $-d\alpha_k$ dans le repère du dipôle, si bien que la variation de l'énergie potentielle (4.10) donne :

$$\begin{aligned} dG_{\text{mag}}^{(int)} &= -\frac{1}{2}\mu_0 \varkappa_{m_{il}} \left(H_{\text{ext}_l} dH_{\text{ext}_i} + H_{\text{ext}_i} dH_{\text{ext}_l} \right) \\ &= -\mu_0 m_{\chi_i} dH_{\text{ext}_i} = -\mu_0 m_{\chi_i} \epsilon_{ijk} H_{\text{ext}_j} d\alpha_k \end{aligned} \tag{4.23}$$

Le moment du couple s'exerçant sur le corps polarisable linéaire s'exprime donc selon une forme identique à celle du dipôle permanent soit :

$$\gamma_k = \mu_0 \epsilon_{ijk} m_{\chi_i} H_{\text{ext}_j} \tag{4.24}$$

4.2.4 Effets électrostatiques

Comme nous l'avons déjà souligné, il ressort du rôle symétrique que jouent les grandeurs $(\mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{B})$ et $(\mathbf{E}, \mathbf{P}, \mathbf{D})$ la possibilité d'établir un parallèle entre l'interaction de dipôles et de champs de nature électrique ou magnétique. Certes, l'existence du « monopôle électrique[(1)] » associé à la charge électrique (q_c), et la force électrostatique qui lui est associée ($\mathbf{f} = q_c\mathbf{E}$), établissent une sérieuse distinction entre les deux domaines. En outre, au delà des analogies purement formelles, l'intensité effective des forces mises en jeu marque une différence notoire entre les deux types de processus d'interaction.

Les forces spécifiques générées dans le champ électromagnétique peuvent être appréhendées par le biais des tensions de Maxwell introduites à la section 2.4.6. L'étude des forces normales et tangentielles engendrées pour des configurations particulières du champ (voir tableau 2.4) montre que les efforts par unité de surface s'identifient à la densité volumique de l'énergie électrostatique ou magnétostatique contenue dans le champ. Par conséquent, les intensités moyennes des forces spécifiques d'origine électrique f_{elec} et magnétique f_{mag} produites dans le vide sont dans le rapport remarquable :

$$\frac{f_{\text{mag}}}{f_{\text{elec}}} = \frac{\left(\frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)}{\left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}\right)} = c^2 \left(\frac{B_0}{E_0}\right)^2 \tag{4.25}$$

Les champs magnétiques obtenus dans un entrefer atteignent couramment une intensité (B_0) de l'ordre de 1 T (soit une densité d'énergie de près de 400.10^3 J.m^{-3}). En revanche, les phénomènes disruptifs conduisent à limiter considérablement l'intensité des champs électriques exploitables en pratique. Dans l'air à la pression atmosphérique, le champ critique est de l'ordre de 1 MV.m^{-1}. Dans ces conditions,

(1) Dans la théorie classique de l'électromagnétisme, la densité de « charge magnétique » est prise identiquement nulle ($\text{div}\mathbf{B} = 0$), contrairement à la densité de charge électrique ($\text{div}\mathbf{D} = \rho$). Ceci présuppose que le monopôle électrique que constitue la particule électriquement chargée n'a pas d'équivalent magnétique. Si les monopôles magnétiques sont pourtant parfaitement concevables d'un point de vue théorique, aucune expérience n'a permis à ce jour de conclure de manière irréfutable à leur existence [**2**].

les densités de force et d'énergie mises en jeu par couplage électrostatique sont près de 100 000 fois plus faibles que leurs homologues magnétiques !

Certes, ces valeurs peuvent être sensiblement augmentées en jouant sur les propriétés du milieu dans lequel baignent les parties actives du dispositif. On aura ainsi très souvent recours à des isolants gazeux tels que l'hexafluorure de soufre (SF_6). Utilisé sous une pression de 1 MPa, ce gaz permet de porter le champ critique à une valeur voisine de 90 MV.m^{-1} (ce qui ramène le niveau des efforts électrostatiques à une valeur 10 fois inférieure à celle des forces magnétiques). Néanmoins, la complexité technologique qui en résulte réduit considérablement la portée de l'interaction électrostatique face aux applications classiques de l'électromécanique. Aussi, les *machines électrostatiques* seront-elles presque exclusivement réservées au domaine des *générateurs à très hautes tensions* et faibles courants. Ces machines sont notamment utilisées pour l'alimentation des accélérateurs de particules (les tensions s'échelonnent entre 1 et 35 MV pour des courants généralement inférieurs à 1 mA).

Dans ce type de générateur, le courant i est dû au déplacement mécanique d'une quantité de charge q_c au moyen d'un « transporteur » mobile. Ce dernier reçoit cette charge (supposée positive) du pôle à bas potentiel et la transmet au pôle à haut potentiel. La quantité de charge transférée par seconde correspond au courant $i = dq_c/dt$. La tension appliquée sur la charge extérieure ($v_c = ri$ dans le cas d'un circuit purement résistif) n'est alors limitée que par l'isolement entre les pôles. Elle peut donc atteindre des valeurs d'autant plus élevées que la distance séparant les pôles est grande (ce qui augmente d'autant l'encombrement général de la machine). En revanche, le courant demeure faible, par principe, du fait de la charge que l'on peut communiquer au transporteur et de sa vitesse limitée.

Les générateurs électrostatiques ont des formes très diverses suivant la nature du transporteur utilisé (solide, liquide ou gazeux). On emploie le plus souvent un isolant. Celui-ci est chargé et déchargé sous l'effet d'une ionisation locale au moyen de pointes ou de lames (ioniseur) influencées par une contre-électrode (inducteur). L'énergie de charge requiert la mise en jeu d'un générateur auxiliaire (tension primaire de l'ordre de 10 kV). Quant à la décharge, il suffit de relier électriquement l'ioniseur et l'inducteur. On peut citer à titre d'exemple les *générateurs à bande isolante* (machines de type Van de Graaf). Selon une forme de réalisation classique, ces structures utilisent un transporteur en forme de courroie sans fin tendue entre deux poulies métalliques. La première est entraînée par un moteur et reliée au sol. Elle constitue l'inducteur pour l'ioniseur de charge connecté au générateur d'excitation. La deuxième poulie, située à l'intérieur d'une sphère isolée (pôle à haut potentiel), est reliée à la sphère et à l'ioniseur de décharge. Le dispositif baigne dans un mélange d'azote et de gaz carbonique sous une pression de 1 à 2 MPa. Les dimensions du générateur sont relativement imposantes : environ 5 m de long et 2 m de diamètre pour un appareil de 3 MV !

Afin de disposer d'un courant de charge i d'intensité significative, sans pour autant mettre en jeu un transporteur de grande dimension, on peut avoir l'idée de véhiculer la

charge électrique dans un écoulement gazeux à grande vitesse. Tel est le principe du *générateur supersonique*. L'alimentation en air comprimé d'une tuyère métallique de quelques millimètres de diamètre, en forme de convergent-divergent, génère un écoulement supersonique au sein d'un tube isolant de quelques centimètres de long. Une première aiguille disposée dans la tuyère et portée à un potentiel de l'ordre de 1 kV génère un courant ionique. Ce courant est véhiculé par les gouttelettes d'eau dues à la condensation de l'air humide. Une seconde aiguille, fixée en sortie du tube isolant, capte les charges et les accumulent sur le pôle à haut potentiel. On obtient ainsi, dans un encombrement réduit, des tensions comprises entre 10 et 100 kV.

Remarquons enfin que, outre ses applications en haute tension, l'interaction électromécanique par couplage électrostatique trouve également un débouché prometteur dans le domaine des *micromachines*, ou plus généralement celui des *microsystèmes* [**47**]. Les difficultés d'ordre technologique auxquelles on se heurte en matière d'intégration de bobinages de dimension micrométrique sont en effet susceptibles de favoriser l'utilisation de champs électriques plutôt que magnétiques. En outre, sous certaines conditions, des effets d'échelle jouent en faveur de l'interaction électrostatique aux faibles dimensions. Il résulte en particulier de la loi exprimant le champ critique d'un gaz en fonction du produit « entrefer$\times$pression » (courbe de Paschen) que l'intensité du champ électrique peut être sensiblement relevée au fur et à mesure que l'on réduit, à pression constante, la distance inter-électrode (cette distance se rapproche alors de la distance moyenne séparant les molécules composant le gaz). L'intensité du champ exploitable dans l'air à pression normale pourrait ainsi dépasser 100 MV.m^{-1} lorsque l'entrefer avoisine 1 μm. Une application relativement spectaculaire de ces investigations est illustrée sur la figure 4.4 montrant une vue au microscope électronique à balayage d'un micromoteur électrostatique « à capacité variable » [**48**].

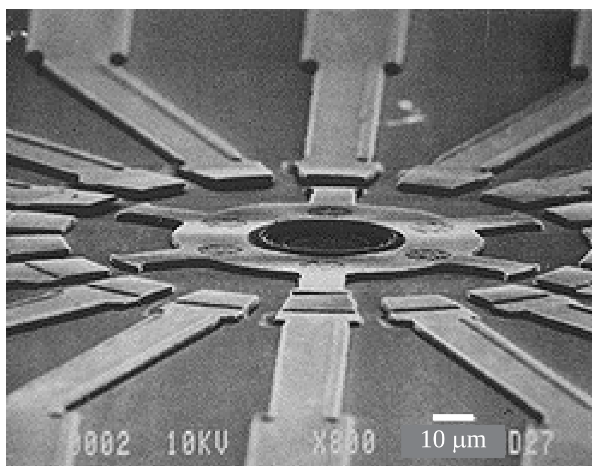


Figure 4.4 Micromoteur rotatif à effet électrostatique intégré sur substrat de silicium (© photo LAAS-CNRS)

4.2.5 Couplage magnétique de sources « produites » ou « induites »

Comme nous l'avons vu au paragraphe 4.2.3, l'interaction statique de sources magnétiques donne lieu à des effets électromécaniques élémentaires que l'on peut déduire, en première approche, des actions subies idéalement par un dipôle placé dans le champ. En vertu du principe d'équivalence « ampérien », le moment magnétique $\mathbf{m}$ caractérisant le dipôle peut être indifféremment engendré par un corps aimanté ou un circuit de courant. On sait en effet que la polarisation magnétique peut être formellement représentée par une distribution de courants fictifs d'aimantation à caractère rotationnel (cf. §2.2.1). Il résulte immédiatement des relations (2.15) et (4.2) que le moment magnétique d'un petit aimant de polarisation $\mathbf{J}$ est équivalent à celui d'une boucle de courant élémentaire d'intensité di et d'élément de surface $\mathbf{ds}$, telle que $\mathbf{dm} = \mathbf{J}/\mu_0 = di\,\mathbf{ds}$.

Ainsi, selon un premier point de vue, les processus d'interaction par couplage magnétique pourront être classés en fonction de la *nature* des sources impliquées, de type *courant* ou *aimantation*.

Pour une source aimantée, il convient par ailleurs de distinguer les milieux polarisés de manière permanente des milieux polarisables. On est donc amené parallèlement à classer les sources selon le *caractère* du moment magnétique qu'elles supportent : ce moment peut être *produit* (dipôle permanent) ou *induit* (dipôle polarisable). Les conditions d'interaction s'en trouvent alors fondamentalement différentes.

a) Effets d'un moment « produit »

Lorsque le corps est rigidement aimanté, le moment est invariablement lié à la matière qui le supporte. Le produit scalaire $\mathbf{m}_p \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}}$ peut donc prendre des valeurs positives ou négatives selon l'angle d'orientation du corps par rapport au champ. Sous l'effet du couple (4.20), le moment cherche spontanément à s'aligner dans la direction du champ extérieur (grâce à une rotation d'angle inférieur à π). S'agissant d'un degré de liberté de translation, la figure 4.5 illustre les effets associés au moyen d'un petit aimant permanent en translation rectiligne le long de l'axe de symétrie (Ox) d'une bobine fixe. L'intensité du champ que produit la bobine sur cet axe est d'autant plus élevée que l'on se rapproche de son centre (O). En d'autres termes, avec l'orientation choisie, l'intensité du champ $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ présente un gradient le long de l'axe Ox qui est négatif à droite de la bobine $(x > 0)$ et positif à gauche $(x < 0)$. Le dipôle étant situé du côté des x positifs, la composante de la force (4.15) qu'il subit suivant ce même axe sera donc négative si le dipôle est orienté dans le sens du champ (figure 4.5 (a)) ou positive dans le cas contraire (figure 4.5 (b)). Pour changer le sens de la force, il suffit de renverser l'axe du moment par rapport au champ, ou réciproquement d'inverser le champ dans lequel baigne le dipôle (en inversant par exemple le sens du courant dans la bobine). Conformément aux propriétés du tenseur de Maxwell (cf. tableau 2.4), on vérifie bien que la force est « attractive » lorsque les lignes de champ coupent l'interface séparant les deux objets selon une direction globalement normale

à la surface. La configuration « répulsive » suppose au contraire une distribution tangentielle du champ le long de cet interface.

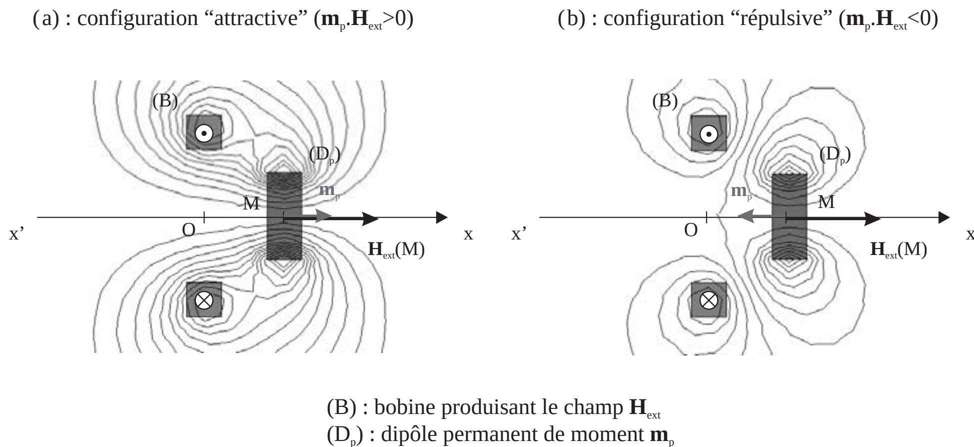


Figure 4.5 Dipôle permanent (moment « produit ») plongé dans le champ d’une bobine fixe

b) Effets d’un moment « induit »

Dans le cas d’un corps polarisable, le moment dépend, en amplitude et en direction, du champ extérieur qui lui donne naissance. Si l’on se limite au cas usuel d’un milieu linéaire caractérisé par une matrice de susceptibilité de forme diagonale, le signe de l’enthalpie d’interaction (4.10) est directement imposé par le signe des constantes $\varkappa_{m_{kk}}$. On distingue alors deux sous-classes d’effets selon le signe de ces coefficients :

➤ Dipôle à *susceptibilité positive* :

Cette catégorie recouvre le cas des milieux *paramagnétiques* (susceptibilité positive de faible valeur) ou *ferromagnétique* (avec les réserves formulées au § 4.2.2). Les composantes de la polarisation induite et du champ extérieur ont même signe. Le produit scalaire $\mathbf{m}_\chi \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}}$ est positif ou nul. En conséquence, le corps dérive spontanément vers les zones où l’intensité du champ est forte, tout en cherchant à orienter son moment dans la même direction et dans le même sens que le champ. La figure 4.6 (a) illustre les effets exclusivement « attractifs » observés dans le cas du dipôle ferromagnétique en translation rectiligne le long de l’axe d’une bobine fixe.

➤ Dipôle à *susceptibilité négative* :

Dans le cas d’un corps *diamagnétique*, les composantes de la polarisation induite sont systématiquement opposées à celles du champ extérieur, si bien que le produit scalaire $\mathbf{m}_\chi \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}}$ est négatif ou nul. Le corps cherche à occuper les zones de plus faible intensité de champ. S’il en a la possibilité, il orientera spontanément son

moment dans une direction perpendiculaire au champ extérieur (minimisation d'une l'enthalpie d'interaction de signe positif ou nul). Comme en témoigne la figure 4.6 (b) dans le cas d'un degré de liberté de translation, l'interaction est alors caractérisée par un effet purement « répulsif ».

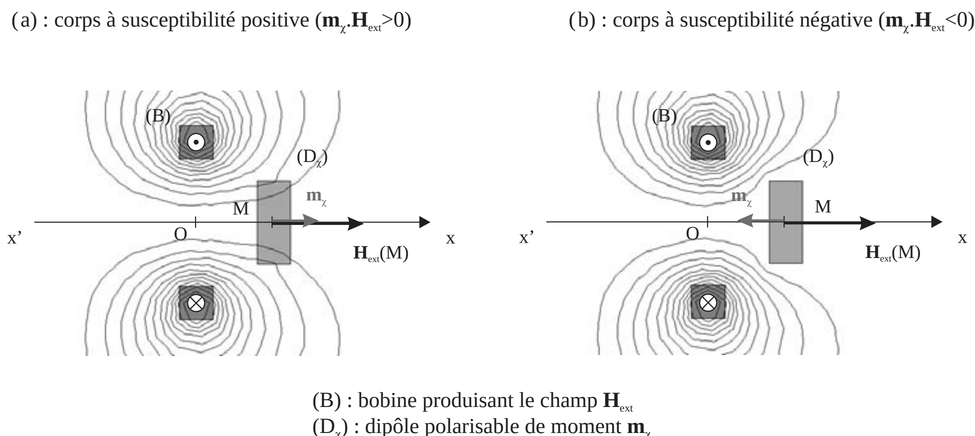


Figure 4.6 Dipôle polarisable linéaire (moment « induit ») plongé dans le champ d'une bobine fixe

Ainsi, contrairement au dipôle permanent soumis à des effets mécaniques « bidirectionnels » (attractifs *et* répulsifs), le dipôle polarisable subit des actions exclusivement « unidirectionnelles » (attractives *ou* répulsives). Le sens de ces actions est directement imposé par le signe des constantes de suceptibilité qui le caractérisent.

Soulignons enfin que la distinction entre moments produit et induit demeure valide dans le cas des sources de type courant. Ainsi, un système de conducteurs au sein desquels circulent des courants imposés par des moyens de contrôle appropriés sera rattaché à la catégorie des sources produites. Quant à la notion de courant induit, elle repose directement sur la mise en jeu des effets de l'*induction électromagnétique*. Point de convergence de l'électricité, du magnétisme et de la mécanique, ces effets « électrodynamiques » par excellence font l'objet du paragraphe suivant.

En conclusion, la mise en œuvre d'un procédé de conversion par couplage magnétique résultera, de manière générale, de l'exploitation combinée des actions mutuelles s'exerçant entre des sources de type *courant* ou *aimantation*, à caractère *produit* ou *induit*. Ce point de vue servira logiquement de référence pour la classification et la description des principaux concepts de machines et d'actionneurs à effets électromagnétiques (chapitre 5), ainsi que pour l'analyse théorique de leur fonctionnement (chapitre 6).

4.3 EFFETS ÉLECTRODYNAMIQUES

4.3.1 Électrodynamique et relativité

L'étude des processus d'interaction électromécanique en régime stationnaire conduit, comme nous l'avons vu, à traiter de manière complètement indépendante les effets dus aux champs électrique (couplage « électrostatique ») et magnétique (couplage « magnétostatique »). Cette situation tendrait à pérenniser la frontière historique qui s'est instaurée entre électricité et magnétisme. Mais la découverte de l'*induction électromagnétique* invite à rompre définitivement avec ce point de vue : électricité et magnétisme constituent bel et bien la manifestation d'une seule et même réalité physique.

Les faits expérimentaux qui signalent le phénomène d'induction sont de deux ordres. On observe tout d'abord l'apparition d'un *courant électrique induit* dans un circuit conducteur fixe placé dans un *champ magnétique variable* (produit lui-même par des courants variables ou résultant du déplacement d'une source magnétique par rapport au conducteur). Ce même circuit est également le siège d'un courant induit s'il est animé d'un *mouvement* par rapport au champ, variable ou invariable, dans lequel il baigne.

Dans l'interprétation « classique » de ces deux effets, les courants induits sont le fruit d'une *force électromotrice d'induction* résultant de la circulation d'un terme supplémentaire de champ électrique le long du trajet conducteur. Il s'agit du « champ électromoteur de Laplace » ($\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$) dans le cas du circuit mobile animé d'une vitesse $\mathbf{v}$ par rapport au champ $\mathbf{B}$, ou bien du « champ de Neumann » $\left(-\partial \mathbf{A}/\partial t\right)$ déduit de (2.8) dans le cas du champ variable [**50**].

Ainsi, le phénomène d'induction établit-il un lien dynamique direct entre les composantes $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ du champ électromagnétique. De ce point de vue, la double interprétation précédemment évoquée n'est pas pleinement satisfaisante. En effet, qu'il soit question d'un conducteur fixe soumis au champ variable produit par une source en mouvement, ou d'un conducteur mobile dans le champ constant d'une source fixe, la cause du phénomène observé tient, pour un observateur galiléen, au mouvement relatif des sources l'une par rapport à l'autre. Aussi, pourquoi faire appel à deux notions distinctes pour interpréter un seul et même fait physique ? La réponse attendue réside dans la nature profondément relativiste du phénomène d'induction. La force électromotrice induite au sein d'un circuit conducteur trouve alors son unique explication dans les champs électriques régnant dans les systèmes de repos[(1)] attachés à chacun des éléments qui le composent [**51**][**2**].

(1) Le *système de repos* d'un corps (indéformable) correspond au référentiel dans lequel la vitesse des particules qui le constituent est nulle à tout instant.

Il est donc opportun de s'intéresser en premier lieu aux lois de transformation que suivent les composantes du champ électromagnétique lors d'un changement de référentiel. Le phénomène d'induction pour les corps en mouvement peut ainsi être appréhendé dans toute sa généralité comme une manifestation directe du principe de relativité. Outre sa portée au plan théorique, le cadre relativiste offre une base de raisonnement cohérente et sûre pour traiter les problèmes pratiques liés à l'induction. La supériorité de ce point de vue se mesure de manière tout à fait concrète face à l'étude de certains types de convertisseurs d'énergie. La machine à induction « homopolaire » (telle que le disque de Faraday), et les paradoxes que l'archétype des générateurs magnéto-électriques est encore susceptible de véhiculer si l'on n'y prend garde, en fournissent un exemple des plus révélateurs.

4.3.2 Transformation des grandeurs électromagnétiques

Dans le cas général de systèmes impliquant un déplacement relatif des corps qui les constituent (cas de la plupart des convertisseurs électromécaniques d'énergie), une question fondamentale repose sur la connaissance des grandeurs électromagnétiques observées depuis différents référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres. L'approche relativiste constitue le cadre tout naturellement approprié pour traiter cette question.

Considérons à cet effet le cas de deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Conformément aux hypothèses et conventions adoptées au paragraphe 2.1.1, on suppose que le référentiel $\mathcal{R}'$ est animé, par rapport à $\mathcal{R}$, d'une vitesse $\mathbf{v}$ dirigée le long de l'axe Ox (dans le sens des x croissants). Nous conviendrons de manière tout à fait arbitraire que $\mathcal{R}$ désigne le système « fixe » (référentiel « du laboratoire » selon l'expression consacrée).

Les composantes d'un vecteur quelconque, ou plus généralement d'un tenseur, exprimées dans un des deux référentiels, se déduisent des composantes qu'il possède dans l'autre par application de la transformation de Lorentz (spéciale) explicitée en annexe A.2.6.

Examinons tout d'abord le cas du quadrivecteur courant $\mathcal{J}^\lambda = (c\rho, \mathbf{j})$. La loi de transformation pour un vecteur est donnée par les formules (2.2). Il vient donc pour $\mathcal{J}^\lambda$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}'^0 = c\rho' = \gamma\,(c\rho - \beta\, j_x) \\ \mathcal{J}'^1 = j'_x = \gamma\,(j_x - \beta c\rho) \\ \mathcal{J}'^2 = j'_y = j_y \\ \mathcal{J}'^3 = j'_z = j_z \end{array} \right. \tag{4.26}$$

Dans la pratique, la vitesse des objets matériels macroscopiques est toujours négligeable devant la vitesse de la lumière. On peut donc considérer $\beta = v/c$ comme un infiniment petit. Le coefficient $\gamma \left(= 1/\sqrt{1-\beta^2}\right)$ est donc égal à l'unité au second ordre près. Par conséquent, transcrites à l'aide des grandeurs vectorielles de l'espace

à trois dimensions, les relations précédentes s'écriront en se limitant aux termes du premier ordre en v/c :

$$\begin{cases} \rho' = \rho - \dfrac{1}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}) \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho\mathbf{v} \end{cases} \tag{4.27}$$

Il ressort de l'équation concernant la densité de courant que, pour un milieu matériel au repos dans $\mathcal{R}'$, la présence d'un *courant de conduction* de densité $\mathbf{j}'$ est perçue, dans $\mathcal{R}$, comme la combinaison d'un courant de conduction et d'un *courant de convection* $\rho\mathbf{v}$ dû au mouvement de la matière chargée. Quant à la première équation, elle manifeste d'une manière corollaire l'existence d'une *charge de convection* produite par le « déplacement » d'un courant électrique. Cette charge de densité $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{j})/c^2$ apparaît intégralement dans le référentiel fixe lors du mouvement d'un conducteur supposé électriquement neutre dans son référentiel de repos ($\rho' = 0$). On remarquera dans ce cas que le courant de convection associé s'exprime en v^2/c^2. Par conséquent, au second ordre près, le courant relatif à un observateur du référentiel fixe ($\mathcal{R}$) est égal au courant de conduction observé dans le système de repos du conducteur $\left(\mathcal{R}'\right)$.

S'agissant des composantes du tenseur champ électromagnétique $\mathcal{F}^{\lambda\mu} = \left(\dfrac{\mathbf{E}}{c}, \mathbf{B}\right)$, elles se transforment selon une loi du type (2.3) conformément aux propriétés d'un tenseur du deuxième rang. Appliquées aux différents éléments du tableau (2.4), ces formules conduisent alors aux relations :

$$\begin{cases} \mathcal{F}'^{01} = -\dfrac{E'_x}{c} = -\gamma^2\left(1-\beta^2\right)\dfrac{E_x}{c} = -\dfrac{E_x}{c} \\ \mathcal{F}'^{02} = -\dfrac{E'_y}{c} = -\dfrac{\gamma}{c}\left(E_y - c\beta B_z\right) \\ \mathcal{F}'^{03} = -\dfrac{E'_z}{c} = -\dfrac{\gamma}{c}\left(E_z + c\beta B_y\right) \\ \mathcal{F}'^{12} = -B'_z = -\gamma\left(B_z - \beta\dfrac{E_y}{c}\right) \\ \mathcal{F}'^{13} = B'_y = -\gamma\left(B_y + \beta\dfrac{E_z}{c}\right) \\ \mathcal{F}'^{23} = -B'_x = -B_x \end{cases}$$

ce qui donne, en négligeant les termes du second ordre :

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \dfrac{1}{c^2}(\mathbf{v}\wedge\mathbf{E}) \end{cases} \tag{4.28}$$

Ces lois montrent l'interdépendance qui s'établit entre les champs **E** et **B** sous l'effet du mouvement. Elles révèlent en cela le caractère « relatif » que présentent les notions de champs électrique et magnétique selon le référentiel par rapport auquel ces grandeurs sont observées. Comme nous avons eu l'occasion de le souligner au chapitre 2, seul le tenseur du champ électromagnétique $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ possède une réalité

physique intrinsèque. Les relations (4.28) montrent qu'il en va tout autrement des champs « tridimensionnels » $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Supposons en particulier qu'un observateur se déplace à vitesse constante par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$ dans lequel règne un champ purement magnétique ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$). Le champ observé dans le référentiel de repos $\left(\mathcal{R}'\right)$ de l'observateur comportera, outre sa composante magnétique $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$, un terme de champ électrique $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. Ce terme n'est autre que le champ électromoteur à l'origine des courants induits susceptibles de circuler dans un corps conducteur en mouvement.

Enfin, dans le cas de milieux polarisés, on peut étudier d'une manière similaire les conditions de transformation auxquelles sont assujetties les tenseurs $\mathcal{G}^{\lambda\mu} = (c\mathbf{D}, \mathbf{H})$ et $\mathcal{M}^{\lambda\mu} = \left(c\mathbf{P}, -\dfrac{\mathbf{J}}{\mu_0}\right)$ introduits à la section 2.2.2. S'agissant en particulier des champs de polarisation électrique et magnétique regroupés dans le tenseur des moments $\mathcal{M}^{\lambda\mu}$, on obtient immédiatement, en substituant respectivement dans (4.28) les composantes $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ aux termes $c^2\mathbf{P}$ et $-\mathbf{J}/\mu_0 \left(= -c^2\epsilon_0\mathbf{J}\right)$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}' = \mathbf{P} - \epsilon_0\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{J}) \\ \mathbf{J}' = \mathbf{J} + \mu_0\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{P}) \end{cases} \tag{4.29}$$

Ainsi, un milieu aimanté et non polarisé dans son référentiel de repos $\left(\mathbf{P}' = \mathbf{0}\right)$ fera apparaître, sous l'effet du mouvement, une polarisation électrique $\mathbf{P} = \epsilon_0\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{J})$ dans le référentiel du laboratoire. Réciproquement, le déplacement à vitesse constante d'un diélectrique pur $\left(\mathbf{J}' = \mathbf{0}\right)$ génèrera une aimantation $\mathbf{M} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{P}$ pour un observateur fixe.

4.3.3 L'approximation galiléenne

L'analyse précédemment développée suppose que les référentiels $(\mathcal{R})$ et $\left(\mathcal{R}'\right)$ soient animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation uniforme. Cette hypothèse peut sembler relativement contraignante a priori. Elle est en effet mise en défaut dans nombre de systèmes électromécaniques fondés, pour une large part, sur la *rotation* de sources électromagnétiques. Aussi, seul le cadre de la *relativité générale* semble pleinement satisfaisant pour développer la théorie rigoureuse et complète de l'électrodynamique des corps en mouvement. Cette approche dépasse cependant le cadre de notre présent propos [**52**].

Nous admettrons par conséquent la validité de l'approximation galiléenne en supposant que les accélérations subies par les corps demeurent faibles. Dans ces conditions, les effets du mouvement réel peuvent être assimilés à ceux du mouvement rectiligne uniforme avec lequel il est *tangent* au point-évènement considéré. Ainsi, pour un élément de matière de vitesse $\mathbf{v}$ au point de coordonnées (ct, x, y, z) dans le référentiel du laboratoire $(\mathcal{R})$, on peut toujours définir un système de repos (invariablement lié à la matière) qui coïncide, au point et à la date considérés, avec un référentiel galiléen $\left(\mathcal{R}'\right)$. Ce dernier est animé d'une vitesse constante égale à $\mathbf{v}$ et

est choisi de telle sorte qu'il se déduit de $(\mathcal{R})$ par une transformation de Lorentz spéciale. Nous supposerons alors que les grandeurs électromagnétiques observées depuis le référentiel de repos du corps peuvent être confondues, au moins en première approximation, avec les grandeurs mesurées par un observateur galiléen lié à $\left(\mathcal{R}'\right)$ au point-évènement $\left(ct', x', y', z'\right)$ transformé de (ct, x, y, z).

L'expérience montre que ce niveau d'approximation suffit généralement à traiter les questions pratiques abordées en conversion électromécanique de l'énergie. On pourra s'en rendre compte dans l'exemple traité au §4.3.6.

4.3.4 Loi de l'induction électromagnétique

L'interdépendance des composantes du champ électromagnétique sous l'effet du mouvement ayant été explicitée, on se propose d'établir la loi générale qui régit l'apparition des courants induits au sein d'un corps conducteur, fixe ou mobile, évoluant dans un champ variable ou invariable. Afin de simplifier le problème, la vitesse de variation du champ est supposée suffisamment petite pour que, d'une part, la longueur d'onde correspondante soit grande devant la dimension du corps, et que, d'autre part, la loi constitutive $\mathbf{j}' = \sigma_e \mathbf{E}'$ caractérisant le milieu conducteur en régime stationnaire *dans son système de repos* reste valable. Ces hypothèses définissent le cadre de l'approximation dite des *états quasi-stationnaires* [**37**]. Dans ces conditions, on peut omettre le terme $\partial\mathbf{D}/\partial t$ (de même que $\partial\mathbf{P}/\partial t$) dans les équations du champ (voir tableau 2.2). Le problème est alors entièrement déterminé par les équations du champ statique couplées par l'équation dynamique :

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.30}$$

L'étude des conditions de transformation du courant lorsque l'on passe du référentiel de repos $\left(\mathcal{R}'\right)$ du conducteur au référentiel du laboratoire $(\mathcal{R})$ a montré que, le corps étant électriquement neutre, les courants de conduction $\mathbf{j}$ et $\mathbf{j}'$ pouvaient être confondus au second ordre près (cf. § 4.3.2). Le champ électrique se transforme quant à lui selon la relation donnée par (4.28). En conséquence, la loi exprimant la dépendance du courant par rapport au champ dans le repère fixe s'écrira :

$$\mathbf{j} = \sigma_e \mathbf{E}' = \sigma_e \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\right) \tag{4.31}$$

Le champ électrique $\mathbf{E}'$ apparaît comme le champ effectivement responsable, dans le cas général d'un conducteur en mouvement, de la création des courants induits (si toutefois ces courants peuvent circuler). Pour un conducteur filiforme se mouvant ou se déformant dans le champ, tel que celui représenté sur la figure 4.7, l'effet du champ « effectif » $\mathbf{E}'$ peut être globalisé au travers de la *force électromotrice d'induction e* qui prend naissance dans le circuit. Cette dernière résulte de la circulation de $\mathbf{E}'$ le long du contour orienté Γ matérialisant le trajet conducteur, conformément à la

relation :

$$e = \int_{(\Gamma)} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{dl} \tag{4.32}$$

Le premier terme rend compte des effets observés dans le cas d'un corps au repos ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) soumis à un champ variable. En utilisant l'équation (4.30), il vient pour cette intégrale (théorème de Stokes) :

$$e_{(\mathbf{v}=0)} = \int_{(\Gamma)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{(S_\Gamma)} \mathbf{rotE} \cdot \mathbf{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S_\Gamma)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} \tag{4.33}$$

On obtient donc un premier terme de force électromotrice égal à la dérivée par rapport au temps, à vitesse $\mathbf{v}$ nulle, du flux magnétique φ à travers la surface S_Γ s'appuyant sur le circuit :

$$e_{(\mathbf{v}=0)} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{(\mathbf{v}=0)} \tag{4.34}$$

Quant au deuxième terme, il a trait aux effets qu'entraînent le mouvement du corps dans un champ $\mathbf{B}$ stationnaire. L'intégrale correspondante s'écrivant sous forme indicielle :

$$e_{(\mathbf{B}=\mathbf{cte})} = \int_{(\Gamma)} \epsilon_{ijk} v_j B_k dl_i \tag{4.35}$$

il vient, en introduisant le déplacement élémentaire $du_j = v_j dt$:

$$e_{(\mathbf{B}=\mathbf{cte})} = \int_{(\Gamma)} \frac{\epsilon_{ijk} B_k du_j dl_i}{dt} = -\int_{(\Gamma)} \frac{\epsilon_{kji} B_k du_j dl_i}{dt} \tag{4.36}$$

En remarquant que le produit vectoriel $\epsilon_{kji} du_j dl_i$ représente l'élément d'aire df_k de la surface latérale engendrée par le déplacement du contour Γ (cf. figure 4.7), l'intégrale (4.36) revient au flux de $\mathbf{B}$ à travers cette surface divisé par l'intervalle de temps dt. Or, en vertu du caractère conservatif du flux magnétique (div$\mathbf{B} = 0$), le flux latéral s'identifie à la différence des flux à travers les surfaces $S_{\Gamma(t+dt)}$ et $S_{\Gamma(t)}$. Il vient par conséquent :

$$e_{(\mathbf{B}=\mathbf{cte})} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{(\mathbf{B}=\mathbf{cte})} \tag{4.37}$$

Dès lors, l'addition des deux contributions obtenues donne finalement :

$$e = e_{(\mathbf{v}=0)} + e_{(\mathbf{B}=\mathbf{cte})} = -\frac{d\varphi}{dt} \tag{4.38}$$

La force électromotrice résultante s'exprime donc comme la *dérivée totale* du flux magnétique par rapport au temps. Son expression condense en une loi unique l'ensemble des effets électrodynamiques associés au phénomène d'induction.

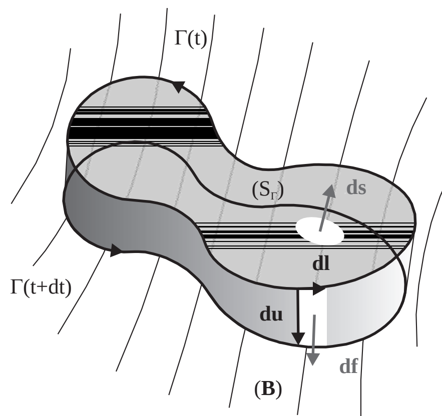


Figure 4.7 Déplacement d'un circuit conducteur dans le champ

4.3.5 Effets électromécaniques de l'induction

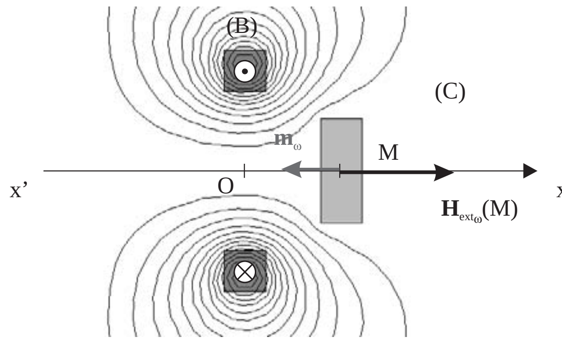
Que la force électromotrice d'induction résulte d'une variation temporelle du champ ou d'un mouvement relatif, le signe négatif caractérisant la loi (4.38), ou l'équation (4.30), témoigne qualitativement d'une *réaction* du système vis à vis de la cause responsable de son changement d'état magnétique(1). Ainsi, toute variation de flux magnétique opérée à travers un circuit conducteur provoquera l'apparition d'une force électromotrice susceptible d'engendrer à son tour des courants induits cherchant à contrecarrer la variation initiale. Ce caractère « modérateur » du phénomène d'induction est connu sous le nom de *loi de Lenz*.

En conséquence, si l'on plonge un conducteur dans un champ variable, ce dernier sera le siège de courants induits s'opposant à la pénétration du champ dans le volume qu'il occupe. Comme l'illustre la figure 4.8, on peut alors attribuer à un petit corps d'épreuve conducteur, placé dans un champ extérieur alternatif $\mathbf{H}_{ext_\omega}$, un moment magnétique instantané $\mathbf{m}_\omega$ qui s'oppose, pour la plus grande partie du temps, aux variations du champ appliqué. Il en résulte pour la force moyenne subie par le corps de la part de la bobine un sens exclusivement *répulsif*. De la même manière, une bobine en court-circuit plongée dans un champ alternatif cherchera spontanément à orienter son axe dans une direction perpendiculaire à celle du champ appliqué. Aussi, ce type d'interaction pourrait-il être qualitativement rapproché des effets précédemment observés dans le cas d'un corps diamagnétique placé dans un champ stationnaire (cf. figure 4.6).

Cette analogie cesse pourtant d'être valide lorsque l'on s'intéresse aux effets inductifs engendrés par le mouvement relatif des sources. En effet, si l'on remplace la

(1) On vérifiera que cette réaction est bien indépendante des conventions d'orientation choisies pour le circuit considéré.

bobine (B) de la figure 4.8 par un aimant permanent polarisé suivant Ox et déplacé le long de ce même axe, on observe que le corps conducteur cherche globalement à accompagner le mouvement imprimé à la source aimantée. Les forces engendrées sont tantôt *répulsives* lorsque l'aimant s'approche du corps, tantôt *attractives* lorsqu'il s'en éloigne. Ces forces disparaissent lorsque la vitesse relative des corps s'annule. Ainsi, d'un point de vue mécanique, l'effet modérateur précédemment évoqué revient à un effet *amortisseur*.



(B) : bobine produisant le champ alternatif $\mathbf{H}_{ext\omega}$
(C) : corps conducteur siège d'un moment induit $\mathbf{m}_\omega$

Figure 4.8 Corps conducteur plongé dans un champ magnétique variable

Nous verrons au chapitre 5 que l'ensemble de ces phénomènes trouve une application directe dans le domaine des machines et des actionneurs électromécaniques. Comme pour les procédés basés sur l'utilisation de moments magnétiques induits (cf. § 4.2.5), l'avantage que procure la mise en jeu de courants induits tient au fait que l'énergie requise pour créer la source magnétique mobile est directement puisée dans le champ avec lequel elle interagit. Aussi, dans certaines configurations, on pourra de ce fait éliminer les moyens de couplage galvanique (généralement un système de bagues et de balais) nécessaires à la création d'une source mobile à partir de courants extérieurement produits.

4.3.6 Sur les vertus d'une conception relativiste de l'induction

Afin de mesurer concrètement l'intérêt du point de vue relativiste pour comprendre et caractériser le fonctionnement des convertisseurs électromécaniques fondés sur le principe d'induction, considérons la machine tournante schématisée sur la figure 4.9. Cette structure, parmi les plus simples que l'on puisse imaginer, est constituée d'un conducteur en forme de tore, de rayon moyen R et de section droite circulaire de

diamètre $2a$, tournant sur lui-même à la vitesse Ω [1]. Le conducteur baigne dans un champ magnétique uniforme que l'on suppose orienté parallèlement à l'axe de rotation. Un jeu de balais M et N, d'axe radial, frotte sur le tore afin de recueillir la tension développée sous l'effet du mouvement. Selon deux configurations possibles, le conducteur peut soit tourner dans le champ fixe d'une source extérieure, soit tourner dans son propre champ, en supposant qu'il soit alors constitué d'un milieu aimanté conducteur. Examinons tour à tour ces deux configurations en fondant notre analyse sur les considérations relativistes précédemment exposées. Conformément aux remarques générales du paragraphe 4.3.3, nous ne tiendrons pas compte des effets liés à la courbure du dispositif. L'ensemble des points appartenant à une même section du tore (selon un plan méridien) sera donc supposé animé de la vitesse tangentielle moyenne $v = R\Omega$.

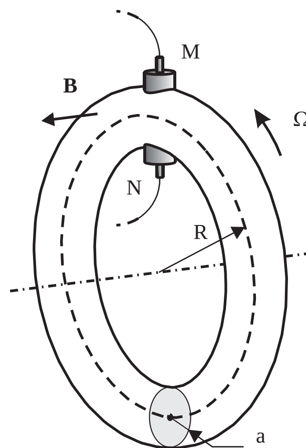


Figure 4.9 Tore conducteur tournant dans un champ magnétique axial

a) *Conducteur tournant dans un champ fixe*

Le champ **B** étant fixe par rapport au référentiel $(\mathcal{R})$ du laboratoire, le conducteur en mouvement est le siège d'un champ électromoteur $\mathbf{E}'_v = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ dans son référentiel de repos $\left(\mathcal{R}'\right)$. Ce champ est orienté selon une direction radiale. Or, si l'on suppose le *conducteur parfait*, à savoir qu'il possède une conductivité infinie, le champ électrique total $\mathbf{E}'$ régnant dans son volume est nécessairement nul. Ceci suppose, comme l'illustre la figure 4.10, que $\mathbf{E}'_v$ soit compensé par le champ $\mathbf{E}'_\sigma$ produit par les charges libres s'accumulant à la périphérie de la jante sous l'effet du mouvement. Dès lors, en

(1) Conformément à l'usage, on aurait pu prendre l'exemple de la géométrie discoïdale caractérisant la célèbre machine de Faraday. S'agissant de la présente discussion, ce choix exigerait cependant de formuler des hypothèses sensiblement plus lourdes quant à la distribution des champs mis en jeu.

vertu de (4.28), le champ électrique à l'intérieur du tore, observé depuis le référentiel du laboratoire, est donné par :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \tag{4.39}$$

Ce champ n'est autre que celui qu'engendrent les charges libres dont les densités surfaciques σ et σ' se confondent au second ordre près (pour s'en rendre compte, il suffit de faire $\mathbf{j}' = \mathbf{0}$ dans (4.27)). Par conséquent, la différence de potentiel recueillie aux bornes de la machine est donnée par :

$$v_{MN} = \Phi_M - \Phi_N = \int_N^M \mathbf{grad}\Phi \cdot \mathbf{dl} = -\int_N^M \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_N^M (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{dl} = 2aR\Omega B \tag{4.40}$$

Cette tension s'identifie à la force électromotrice d'induction que l'on déduirait plus classiquement de la loi (4.38) en considérant le flux « coupé » à travers la surface élémentaire $2aR\Omega dt$. On peut ainsi vérifier la parfaite concordance de la théorie classique (prérelativiste) avec les considérations basées sur la transformation des champs.

Le conducteur n'est le siège d'aucuns courants volumiques internes (courants de Foucault), puisque tout contour fermé défini à l'intérieur du tore embrasse un flux magnétique constant. En revanche, si un dipôle conducteur fixe est branché entre les balais M et N, la force électromotrice développée à l'intérieur du tore est susceptible de lancer un courant dans le circuit extérieur. La machine fonctionne alors selon un principe en tous points analogue au générateur discoïdal originellement expérimenté par Faraday (cf. § 1.2.3). Appartenant à la classe des machines *homopolaires* (le conducteur balaye un champ de polarité invariable), ce type de générateur est capable de produire de très forts courants sous de faibles tensions (cf. section 5.1).

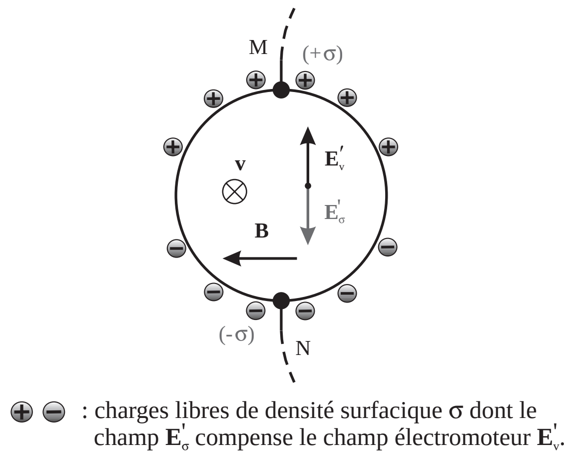


Figure 4.10 Champs et charges électriques mis en jeu à l'intérieur du tore conducteur en rotation dans un champ magnétique fixe

b) Conducteur aimanté tournant dans son propre champ

Examinons maintenant le cas où le tore est constitué d'un milieu aimanté conducteur uniformément polarisé suivant une direction parallèle à son axe de rotation. Dans ces conditions, le corps se meut dans un champ magnétique invariablement lié à la matière qui le constitue. Le fait que le conducteur ne « coupe » plus les lignes du champ magnétique inviterait à conclure sans ambages que le circuit n'est le siège d'aucune force électromotrice d'induction. Il n'en est rien ! Une différence de potentiel apparaît bel et bien entre les balais M et N sous l'effet de la rotation du tore aimanté. Si la théorie classique fournit une explication pleinement satisfaisante lorsque le conducteur se déplace par rapport au champ, comment interpréter la contradiction apparente qu'elle suggère dans le cas présent ? Pour lever une telle ambiguïté, le point de vue relativiste s'impose.

On doit tout d'abord observer que la différence de potentiel entre M et N ne peut être due à un quelconque champ électromoteur agissant à l'intérieur du conducteur. En effet, dans le système de repos du conducteur, il règne un champ purement magnétique. En revanche, si le conducteur n'est pas électriquement polarisé pour un observateur de $\left(\mathcal{R}'\right)$, les formules (4.29) montrent que le mouvement du corps aimanté génère, dans le référentiel du laboratoire, une polarisation électrique :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left(\mathbf{v} \wedge \mathbf{J}\right) \tag{4.41}$$

Cette polarisation étant uniforme ($\mathrm{div}\mathbf{P} = 0$), elle équivaut à un système de charges fictives distribuées de manière purement surfacique. La densité σ_p de ces charges liées est déterminée par la relation (2.14), ce qui donne, dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dont l'axe polaire coïncide avec l'axe NM :

$$\sigma_p = P \cos\theta \tag{4.42}$$

Comme le montre la figure 4.11, ces charges engendrent, à l'extérieur du tore, un champ électrostatique. Les lignes équipotentielles (tangentes à $\mathbf{E}$) dans un plan méridien sont des cercles passant par l'origine du système de coordonnées et dont les centres sont situés le long de l'axe polaire. On montre en effet que ce champ résulte d'un potentiel scalaire de la forme :

$$\Phi(r, \theta) = \frac{Pa^2}{2\epsilon_0 r} \cos\theta \tag{4.43}$$

La justification de cette expression du potentiel pourra être trouvée au § 6.2.1 grâce à l'analogie qui existe entre les équations statiques régissant les champs magnétique ($\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$) et électrique ($\Delta\Phi = 0$). Dans le cas présent, cette analogie produit le fait remarquable que les lignes du champ $\mathbf{B}$ (équipotentielles « vecteur ») dues à l'aimantation uniforme $\mathbf{J}$ se confondent avec les lignes de $\mathbf{E}$ (équipotentielles « scalaire ») associées à la polarisation $\mathbf{P}$ (d'axe perpendiculaire à $\mathbf{J}$).

Par conséquent, le potentiel aux points M et N ayant pour valeurs :

$$\Phi_M = \Phi(a,0) = \frac{Pa}{2\epsilon_0} = \frac{aR\Omega J}{2} \; ; \; \Phi_N = \Phi(a,\pi) = -\frac{aR\Omega J}{2} \tag{4.44}$$

la présente théorie prouve qu'il apparaît aux bornes de la machine une tension :

$$v_{MN} = aR\Omega J \tag{4.45}$$

Si la polarisation de l'aimant équivaut au double de l'intensité du champ **B**, cette tension a la même valeur que celle trouvée dans le cas du conducteur non aimanté. Ceci résulte du fait que, à l'intérieur d'un cylindre uniformément aimanté, champ et polarisation sont assujettis à l'identité remarquable $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{2}$ (cf. § 6.2.1).

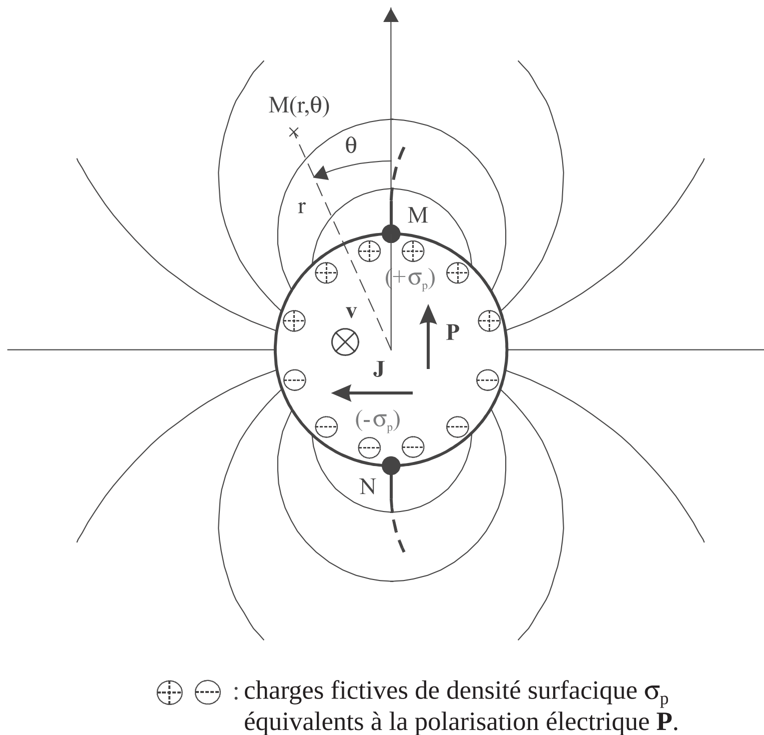


Figure 4.11 Charges de polarisation et champ électrostatique engendrés dans le référentiel fixe sous l'effet du mouvement du conducteur uniformément aimanté

Dès lors, le raisonnement selon lequel la rotation du conducteur dans son propre champ n'engendrerait aucune tension parce qu'il n'y a pas de mouvement relatif du conducteur par rapport au champ doit être amendé. En réalité, bien que maladroit, un tel raisonnement reste applicable, à condition toutefois de noter que la tension produite résulte d'une force électromotrice d'induction développée *à l'extérieur* du

conducteur. Ainsi, c'est dans le circuit de charge, fixe par rapport au champ de l'aimant en rotation, que se trouve la source du courant débité par la machine lorsqu'elle fonctionne en générateur. Pour s'en convaincre, on pourra facilement reproduire l'expérience ludique illustrée sur la figure 4.12 à l'aide d'un petit aimant métallique du commerce entraîné en rotation.

On perçoit au travers de ce petit exemple l'avantage que procure une conception résolument relativiste des effets électrodynamiques subis par la matière en mouvement. Si la théorie classique de l'induction demeure parfaitement opérante dans nombre de cas, elle ne fournit pourtant qu'une vision partielle du phénomène et peut conduire, si l'on n'y prend garde, à des conclusions erronées. Aussi doit-on manipuler avec une certaine précaution la loi générale de l'induction (4.38), au demeurant fort commode, en gardant à l'esprit la réalité précise à laquelle elle fait référence dans l'univers relativiste.



Figure 4.12 Mesure de la différence de potentiel développée par un aimant conducteur en rotation autour de son axe de polarisation magnétique (© INPT/ENSEEIHT/D.H.)

4.4 COUPLAGES ÉLECTRO-MAGNÉTO-ÉLASTIQUES

4.4.1 Considérations thermodynamiques

Sous l'effet d'un couplage des propriétés diélectriques, magnétiques et élastiques de la matière, la déformation d'un corps et son état de polarisation électromagnétique peuvent se trouver en étroite dépendance. Rattachés à la classe des processus d'interaction *divalente* (cf. § 4.1.2), les effets de ce couplage *électro-* ou *magnéto-élastique* sont directement exploitables en conversion d'énergie.

Considérons tout d'abord le cas de l'interaction électroélastique. Pour décrire l'état local de la matière, plusieurs paramétrages sont a priori possibles. On peut en effet choisir comme variables indépendantes mécaniques et électriques la déformation S_{ik} ou la contrainte T_{ik}, et respectivement le déplacement D_i ou le champ E_i. Parmi les quatre choix possibles, convenons par exemple de travailler avec les variables (T_{ik}, E_i). D'un point de vue thermodynamique, ce choix repose sur la définition d'un potentiel approprié, conformément à la méthode décrite au paragraphe 3.4.2. Dans le cadre d'une transformation quasi-statique opérée à température Θ constante, ce potentiel correspond à une « enthalpie libre électromécanique » définie à partir de l'énergie libre volumique F par :

$$G = F - T_{ik}S_{ik} - E_i D_i \tag{4.46}$$

La différentielle de G à température constante s'écrit :

$$dG = -S_{ik}dT_{ik} - D_i dE_i \tag{4.47}$$

Si l'interaction est *linéaire*, on peut postuler une enthalpie de la forme :

$$G = -\frac{1}{2}s^E_{iklm}T_{ik}T_{lm} - d_{jik}T_{ik}E_j - \frac{1}{2}\epsilon^T_{ij}E_iE_j \tag{4.48}$$

où les constantes isothermes s^E_{iklm}, ϵ^T_{ij} et d_{jik} désignent respectivement la souplesse à champ électrique constant (ce que rappelle la lettre E figurant en exposant), la permittivité diélectrique à contrainte fixée et la constante de couplage électroélastique (constante de charge).

En utilisant la notation condensée introduite au paragraphe 2.2.3, cette enthalpie volumique s'écrit aussi :

$$G = -\frac{1}{2}s^E_{\lambda\mu}T_\lambda T_\mu - d_{i\lambda}T_\lambda E_i - \frac{1}{2}\epsilon^T_{ij}E_iE_j \tag{4.49}$$

(où l'on rappelle que les indices λ et μ varient de 1 à 6, conformément aux conventions d'écriture adoptées).

Ainsi, outre les contributions d'origine purement élastique et électrostatique, la mise en jeu d'un couplage entre les deux formes d'énergie en présence se traduit formellement dans le développement du potentiel par un terme bilinéaire en $T_\lambda E_i$.

D'une manière parfaitement analogue, la possibilité d'un couplage magnéto-élastique linéaire sera appréhendée au moyen d'un terme d'interaction de la même forme. Il suffit pour cela de définir une enthalpie libre « magnétomécanique » dont l'expression diffère de (4.49) en ce que le champ E_i et la permittivité ϵ_{ij}^T sont respectivement remplacés par le champ H_i et la perméabilité μ_{ij}^T.

4.4.2 Piézoélectricité

Le phénomène de couplage électroélastique linéaire précédemment caractérisé est connu sous le nom de *piézoélectricité*. Ce phénomène est observé dans certains cristaux naturels tel que le quartz (SiO_2) ou dans des composés synthétiques comme les céramiques ferroélectriques de type PZT ($Pb(Zr\text{-}Ti)O_3$). Son interprétation tient au moment dipolaire qu'une maille cristalline ionique est susceptible de développer lorsqu'elle est déformée. En première analyse, la polarisation peut être attribuée au déplacement relatif du barycentre des charges positives et négatives portées par les ions qui la constituent. Ceci suppose toutefois que le cristal soit non conducteur et que sa maille élémentaire ne possède pas de centre de symétrie[(1)].

Les lois de comportement qui décrivent les propriétés électroélastiques d'un milieu piézoélectrique s'obtiennent directement par dérivation du potentiel thermodynamique associé au jeu de variables indépendantes choisies. On peut ainsi établir a priori quatre jeux d'*équations constitutives* pour le phénomène de piézoélectricité, selon que l'on privilégie les couples de variables (S_{ik}, D_i), (S_{ik}, E_i), (T_{ik}, D_i) ou (T_{ik}, E_i) [**43**]. Déduites du potentiel (4.49), les équations constitutives en termes des variables (T_{ik}, E_i) prennent donc la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} S_\lambda &= -\left(\frac{\partial G}{\partial T_\lambda}\right)_{\Theta,\mathbf{E}} = s^E_{\lambda\mu} T_\mu + d_{i\lambda} E_i \\ D_i &= -\left(\frac{\partial G}{\partial E_i}\right)_{\Theta,\mathbf{T}} = d_{i\lambda} T_\lambda + \epsilon^T_{ij} E_j \end{aligned} \right. \tag{4.50}$$

La première équation montre que, outre le terme d'élasticité proportionnel à la contrainte (loi de Hooke), une contribution d'origine électrique (en $d_{i\lambda}E_i$) figure dans l'expression de la déformation. Ce terme supplémentaire signale une première forme d'interaction dénommée *effet piézoélectrique inverse* (déformation d'un corps sous l'action d'un champ électrique extérieur).

Quant à la deuxième équation, elle rend compte, en plus des propriétés diélectriques du milieu, de l'existence d'une polarisation électrique d'origine mécanique (terme en $d_{i\lambda}T_\lambda$). Il s'agit de l'effet réciproque dénommé *effet piézoélectrique di-*

(1) Parmi les 21 classes cristallines non-centrosymétriques, 20 sont susceptibles de manifester le phénomène de piézoélectricité.

rect (polarisation électrique du corps sous l'action d'une contrainte mécanique appliquée).

Soulignons que ces deux formes de couplage découlent d'une même constante $d_{i\lambda}$ figurant conjointement dans les deux équations (4.50). Aussi, d'un point de vue thermodynamique, le fait que les effets piézoélectriques direct et inverse sont la manifestation d'un seul et même phénomène est intrinsèquement établi. Cette situation n'était pas forcément évidente à l'issue des premières observations du phénomène [**18**]. Notons par ailleurs que l'anisotropie nécessaire à l'existence de la piézoélectricité impose une caractérisation tensorielle de ses effets.

Ainsi, les propriétés piézoélectriques d'un matériau donné sont-elles étroitement liées à la forme de la matrice des constantes de charge $d_{i\lambda}$ et à la valeur numérique de ses coefficients. Compte tenu de l'intérêt pratique que représentent les céramiques de type PZT en matière d'application, les conditions de couplage propres à cette gamme de composés seront étudiées en détail au paragraphe 7.1.2. Retenons ici simplement que, même dans le cas de matériaux performants, les déformations mises en jeu sont relativement faibles : sous un champ de 1 $MV.m^{-1}$, la déformation (relative) observée dans une céramique PZT de composition standard est de l'ordre de 500 ppm (parties par million) en régime quasi-statique. En revanche, les contraintes développées par effet piézoélectrique inverse peuvent atteindre plusieurs dizaines de MPa. Ces contraintes dépassent ainsi de plusieurs ordres de grandeur les pressions d'origine magnétique exploitées classiquement dans l'entrefer des convertisseurs à effets électromagnétiques.

4.4.3 Électrostriction

Outre le phénomène linéaire de piézoélectricité, le couplage électroélastique peut aussi se manifester selon un processus non-linéaire. Le développement de l'enthalpie met alors en jeu des termes d'interaction d'ordre supérieur à deux. La déformation et le déplacement électrique ne s'expriment plus linéairement en fonction du champ et de la contrainte. Tel est le cas du phénomène d'*électrostriction* qui repose sur une dépendance quadratique des termes de déformation vis à vis du champ électrique. Contrairement à l'effet piézoélectrique inverse, le sens de la déformation obtenue sera dans ce cas indépendant du signe du champ appliqué.

Si l'électrostriction apparaît dans tous les diélectriques cristallins ou amorphes, elle conduit à des effets généralement négligeables devant les effets linéaires. Cependant, certaines solutions solides telles que les relaxeurs de type PMN-PT manifestent des propriétés électrostrictives relativement intéressantes. Les déformations produites en régime quasistatique peuvent atteindre 2 000 ppm sous un champ de 2 $MV.m^{-1}$ [**53**]. Soulignons que ces composés présentent une faible hystérésis dans le plan contrainte-déformation. En outre l'absence de polarisation initiale constitue un sérieux atoût quant à la stabilité dans le temps de leurs performances.

4.4.4 Magnétostriction, piézomagnétisme

Constituant le pendant magnétique des effets de couplage précédemment décrits, le phénomène non linéaire de *magnétostriction* conduit à l'allongement d'un barreau de fer soumis à un champ magnétique longitudinal (cf. l'exemple du tableau 4.2). Un effet de striction est conjointement obtenu dans les directions transversales (effet Joule transversal). Réciproquement, le barreau s'aimante sous l'effet d'une déformation longitudinale (effet Villari). Ce phénomène peut également se manifester, suivant la géométrie considérée, au travers d'autres modes de couplage donnant lieu notamment à des effets de flexion (effet Guillemin) ou de torsion (effet Wiedemann) [**54**].

Sans entrer dans les détails d'un phénomène d'origine éminemment quantique, on peut néanmoins attribuer son existence à la compétition de différentes contributions énergétiques. On sait en effet que tout équilibre stable implique la minimisation d'un potentiel thermodynamique judicieusement défini. Dans le cas de la magnétostriction, ce potentiel doit inclure :

- l'énergie d'échange (tendant à aligner les moments magnétiques de spin au sein des domaines ferromagnétiques),
- l'énergie magnétostatique (visant au contraire à la non uniformité de la polarisation macroscopique globale),
- l'énergie d'anisotropie magnétocristalline (privilégiant des axes de facile aimantation),
- l'énergie d'interaction magnéto-élastique (associée à la déformation des domaines).

Dès lors, les états magnétique et mécanique de la matière aimantée sont intimement liés. On peut appréhender concrètement les causes d'une telle interaction si l'on considère, par exemple, les conséquences d'une rotation des moments magnétiques élémentaires sous l'effet d'un champ extérieur. Les nuages électroniques relatifs aux atomes considérés étant de forme asphérique, cette rotation s'accompagne nécessairement d'une déformation du réseau cristallin.

Malgré la complexité des mécanismes physiques mis en jeu, les propriétés magnéto-élastiques des milieux matériels peuvent être formellement décrites à l'aide d'une formulation analogue aux équations (4.50) dans le cas linéaire. On parle alors de *piézomagnétisme*.

Notons cependant que les composés donnant lieu à des effets magnétoélastiques importants sont tributaires d'un couplage du second ordre (la déformation mécanique dépend du champ magnétique selon une loi quadratique). Néanmoins, l'optimisation des conditions de fonctionnement des transducteurs magnétostrictifs conduit souvent à les exploiter sous une polarisation magnétique statique (grâce à des aimants permanents de polarisation par exemple) combinée à une précontrainte mécanique. Le comportement du matériau autour d'un point de fonctionnement donné peut alors être linéarisé. Les équations linéaires du piézomagnétisme sont alors applicables.

Initialement tributaire des propriétés ferromagnétiques des métaux (Fer, Cobalt, Nickel) et de leurs alliages, le développement des matériaux magnétostrictifs a bénéficié de la mise au point, durant les années 1980, d'alliages de fer et de terres rares dotés de propriétés remarquables (déformations relatives de 10 à 50 fois supérieures à celles des métaux précédemment cités). Tel est le cas du composé connu sous le nom de Terfenol-D ($Tb_{1-x}Dy_xFe_y$ avec $x \simeq 0,7$ et $y \simeq 2$). Ce matériau donne lieu à des déformations relatives en régime quasi-statique de l'ordre de 1 000 à 2 000 ppm (valeurs que l'on peut doubler en régime résonnant). Si les performances intrinsèques de ces alliages, souvent qualifiés de matériaux « à déformation géante », sont globalement comparables à celles de leurs homologues piézoélectriques, leur mise en œuvre en est généralement plus délicate. En effet, l'excitation d'un transducteur piézoélectrique s'effectue par le biais de simples électrodes accolées à un milieu de grande permittivité (de l'ordre de 1 000 pour les céramiques PZT). En revanche, la commande optimisée des actionneurs magnétostrictifs repose sur une architecture complexe combinant bobinage d'excitation, aimant de polarisation, culasse magnétique et système de précontrainte mécanique. En outre, le champ d'excitation magnétique requis (de l'ordre de $100\ \text{kA.m}^{-1}$) est d'autant plus élevé que la perméabilité du matériau est faible (inférieure à 4 dans le cas du Terfenol-D). Ainsi, hormis certaines applications particulières (hydrophones, transducteur sonar, sondage pétrolier etc.), les actionneurs magnétostrictifs demeurent peu utilisés en conversion d'énergie comparés aux transducteurs piézoélectriques. On peut néanmoins signaler les investigations réalisées dans le domaine des moteurs rotatifs ou linéaires à efforts élevés et basses vitesses [**55**][**56**].

4.4.5 Polymères électroactifs

Avant de clore ce rapide tour d'horizon des propriétés électro-magnéto-élastiques de la matière, il convient enfin d'évoquer les possibilités offertes par les *polymères électroactifs*. Cette famille relativement récente englobe en fait deux catégories d'effets bien distincts.

Une première classe concerne tout d'abord le cas des *polymères piézoélectriques*. De par leur nature semi-cristalline(1), les milieux polymères peuvent en effet être le siège d'un couplage électro-élastique linéaire. On peut citer à titre d'exemple le cas du PVDF de motif élémentaire ($-CH_2 - CF_2-$). Les propriétés piézoélectriques de ce type de composé sont certes beaucoup moins marquées que celles des céramiques polycristallines (les constantes de charge du PVDF sont environ 20 fois plus faibles que celles des céramiques PZT). En revanche, la souplesse mécanique élevée de la matrice polymère et la possibilité de travailler sous des champs relativement intenses (supérieurs à $10\ \text{MV.m}^{-1}$) conduisent à des fonctionnalités complémentaires de celles des céramiques. Utilisés en tant que capteurs électromécaniques, les polymères piézoélectriques se révèlent ainsi d'une grande facilité de mise en oeuvre.

(1) L'état semi-cristallin se caractérise par la coexistence d'une phase cristalline avec une phase amorphe.

Une autre filière, que l'on pourrait plus justement qualifier de *polymères électroactivés*, a trait aux déformations d'origine électrostatique produites au sein d'un élastomère polarisé entre deux électrodes. Les forces variant dans ce cas comme le carré de l'intensité du champ, l'accès à des performances significatives repose sur l'utilisation de diélectriques alliant haute rigidité diélectrique et grande souplesse mécanique. Le silicone ($-\mathrm{Si}-O-$) constitue de ce fait un polymère particulièrement indiqué. Cette classe de matériau offre des performances et des fonctionnalités inédites en terme de compromis effort - déformation [**61**]. Ainsi, certains auteurs n'hésitent pas à les qualifier de « muscles électroactifs »(1)

4.5 AUTRES FORMES D'INTERACTION

Les processus décrits au cours des paragraphes précédents procèdent d'une manière générale des actions engendrées par le champ électromagnétique sur des corps solides, déformables ou indéformables. Or, les milieux fluides sont également à même de subir les effets du champ. Une première classe de processus concerne ainsi les couplages *magnétohydrodynamiques*. Selon un deuxième type d'effets, la viscosité du fluide elle-même peut être directement affectée par le champ électromagnétique. On a alors affaire aux liquides *électro- ou magnéto-rhéologiques*.

Par ailleurs, outre le principe d'un couplage électromécanique direct, il est également possible de tirer parti d'une forme d'énergie intermédiaire pour réaliser l'interaction recherchée. Tel est le cas des *alliages à mémoire de forme* qui réalisent un couplage indirect de type électro-thermo-élastique. Mentionnons encore l'idée qui consisterait à récupérer le travail des forces de pression produit par les dégagements gazeux lors d'une réaction électrochimique réversible (au sein d'une pile à combustible par exemple(2)).

Si la caractérisation exhaustive de l'ensemble des principes potentiellement exploitables sort à l'évidence du cadre de notre propos, on peut néanmoins en décrire brièvement les principales fonctionnalités.

4.5.1 Effets magnétohydrodynamiques

On regroupe sous cette dénomination les actions électromécaniques subies par des fluides conducteurs plongés dans un champ électromagnétique. Le mouvement d'un fluide conducteur soumis à un champ magnétique fait apparaître un champ électromoteur. Celui-ci est à l'origine du développement de courants électriques induits dans le milieu fluide. Les forces qui naissent de l'interaction de ces courants avec le champ

(1) Pour mémoire, on peut estimer que la contrainte développée au sein d'un muscle biologique humain est de l'ordre de $0,2$ MPa, pour une déformation relative maximale avoisinant $35\,\%$

(2) À partir d'un tel procédé, on a pu par exemple réaliser un actionneur linéaire capable de développer une force de l'ordre de 100 N (sous une pression de $0,3$ MPa) sur une course de 5 mm, le temps de déplacement étant de l'ordre de 50 s [**57**].

initial sont alors susceptibles de modifier les conditions de l'écoulement. Réciproquement, le champ électromagnétique lui-même est affecté par les courants induits. Pour caractériser cette interaction relativement complexe, il s'agit donc de résoudre le système d'équations couplées qui gouvernent conjointement la distribution du champ et la dynamique du fluide [**58**].

Une application directe de tels effets concerne par exemple le brassage des coulées dans le domaine de la métallurgie. Un champ magnétique variable, produit par des enroulements convenablement répartis autour du métal en fusion, engendre des tourbillons dans l'écoulement. Ces tourbillons assurent une homogénéïsation efficace de la coulée et améliorent considérablement les caractéristiques du produit final.

Les effets magnétohydrodynamiques peuvent également être envisagés en tant que moyen de propulsion. Appliqué au domaine naval, il s'agit par ce principe de créer un propulseur sans turbine exploitant directement les forces générées dans l'eau de mer sous l'action combinée d'un courant électrique et d'un champ magnétique. Afin de disposer d'un champ d'intensité significative, l'inducteur est généralement constitué par un aimant supraconducteur [**59**].

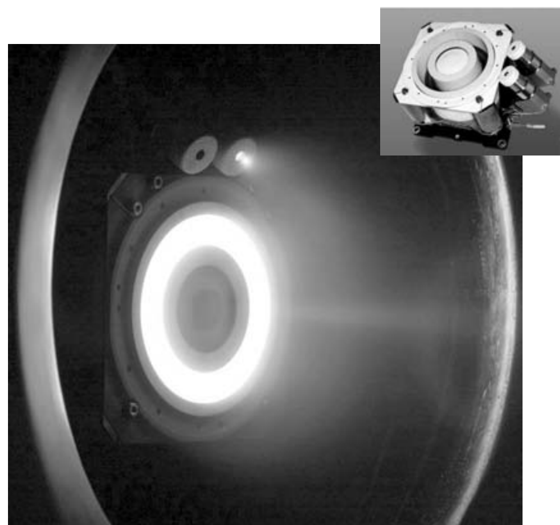


Figure 4.13 Propulseur à plasma stationnaire utilisé pour le contrôle d'orbite et de transfert d'orbite des satellites et sondes spatiales (© Snecma Moteurs)

Un autre domaine d'application très prometteur concerne le secteur spatial. L'utilisation de propulseurs à plasma dans les satellites, en remplacement des moteurs à ergol, permet de disposer de « thrusters » électriques plus légers et d'une utilisation plus souple. La figure 4.13 montre un propulseur à plasma stationnaire en cours d'essai. La poussée obtenue résulte de l'éjection à grande vitesse d'ions de xénon accélérés au moyen d'un champ électrique. Dans le type de propulseur considéré

(propulseur à effet Hall), ce champ électrique axial est obtenu par confinement des électrons dans un champ magnétique radial créé à l'aide de bobines externes [**60**].

L'écoulement d'un fluide ionisé, soumis à un champ magnétique, peut réciproquement être utilisé pour produire de l'électricité. Dans ce type de générateur, un courant gazeux porté à haute température (environ 2 000° K) et ionisé est éjecté à grande vitesse entre deux électrodes parallèles. Ce gaz résulte par exemple de la combustion d'un carburant liquide. Un champ magnétique est produit dans une direction parallèle aux électrodes, perpendiculairement à la vitesse de l'écoulement. Les ions positifs et les électrons sont alors déviés vers des électrodes opposées, créant respectivement les pôles positif et négatif du générateur.

Remarquons de manière générale que l'avantage de ces dispositifs tient pour une large part à la simplicité de leur architecture de base, ainsi qu'à l'absence de pièces en mouvement. Cependant, les difficultés de production de champs et de courants d'intensité significative, au sein de milieux généralement peu conducteurs et faiblement perméables, ont freiné jusqu'à présent leur développement à grande échelle.

4.5.2 Fluides électro- ou magnéto-rhéologiques

Outre les forces volumiques ou surfaciques qu'il peut produire au sein d'un fluide, le champ électromagnétique est également à même de modifier ses propriétés viscoélastiques. C'est ainsi qu'un champ électrostatique permet de contrôler à distance l'écoulement d'un liquide *électro-rhéologique*. Des propriétés analogues sont observées dans le cas d'un fluide *magnéto-rhéologique* soumis au champ d'un aimant.

Ce type de propriété est obtenu à l'aide de suspensions non colloïdales à base de poudres à grains micrométriques dotées de propriétés diélectriques (fluides électro-rhéologiques) ou ferromagnétiques (fluides magnéto-rhéologiques). La viscosité apparente du liquide peut alors être modifiée de manière réversible en fonction de l'intensité du champ appliqué.

Dans le cas des fluides magnéto-rhéologiques, cette viscosité peut être ajustée de manière continu depuis un comportement à viscosité réduite jusqu'à un état quasi-solide. En première approximation, la loi de comportement du fluide dans le plan contrainte - vitesse de cisaillement fait apparaître trois zones principales. Pour les faibles valeurs de contrainte, la réponse du milieu suit une loi élastique. Une zone intermédiaire à caractère visco-plastique apparaît ensuite au delà d'un certain seuil de contrainte. Enfin, aux contraintes élevées, la loi de comportement peut être assimilée à celle d'un fluide newtonien (contrainte proportionnelle à la vitesse de cisaillement). D'un point de vue quantitatif, les pressions ainsi générées sont couramment de l'ordre de $0,1\ \text{MPa}$ (sous une excitation magnétique de l'ordre de $250\ \text{kA.m}^{-1}$).

L'exploitation de ces effets concerne des domaines relativement variés tels que l'automobile (embrayages, freins, ou suspensions actives à commande électromagnétique), les microsystèmes (microactionneurs fluidiques) ou encore le bâtiment (amortisseurs sysmiques à contrôle actif) [**29**].

4.5.3 Alliages à mémoire de forme

Certains alliages métalliques tels que les composés de type NiTi, CuZnAl ou CuAlNi présentent des propriétés thermoélastiques remarquables qui permettent de contrôler leur état de déformation, dans des proportions relativement importantes, par simple variation de la température [**62**]. La déformation obtenue résulte d'une transition de phase solide de type martensitique - austénitique. Le corps est alors capable de recouvrer à chaud sa forme initiale préalablement modifiée à froid, d'où le nom d'*alliage à mémoire de forme*. Outre cet effet « unidirectionnel », on peut aussi, dans certaines conditions, basculer de manière réversible entre deux formes limites. Le processus est alors qualifié de « bidirectionnel ».

La figure 4.14 illustre le comportement d'un fil de Nitinol (alliage NiTi) soumis à une charge statique et contrôlé en température entre deux états extrêmes. On observe dans le plan déformation - température un cycle d'hystérésis caractéristique de ce type de composé.

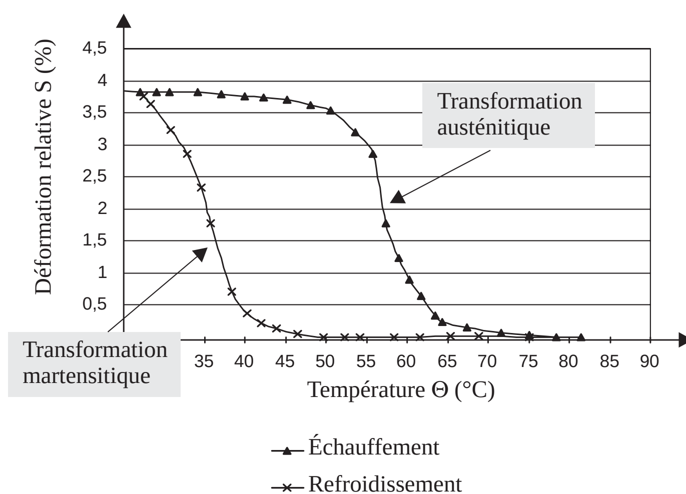


Figure 4.14 Cycle thermique de déformation d'un fil de Nitinol (de 1 mm de diamètre) sous charge statique ($T_0 = 35$ MPa)

Les contraintes développées durant la phase de chauffage peuvent atteindre des valeurs très élevées (de l'ordre de 100 MPa). De même, les déformations obtenues sous charge maximale sont considérables (elles avoisinent 80 000 ppm pour certains composés). En revanche, les temps de réponse (constante de temps thermique) sont par principe relativement faibles (de l'ordre de $0,1$ à 1 s pour des dispositifs de dimensions millimétriques). Le contrôle électrique de la température (par effet Joule) au moyen d'un courant circulant directement dans le matériau permet de disposer

d'un actionneur relativement compact. L'effet peut être exploité selon diverses géométries, donnant lieu à des actionneurs linéaires ou rotatifs utilisés notamment en robotique (préhenseur, robot d'inspection). Un champ d'application particulièrement prometteur concerne également le contrôle actif de forme en aéronautique (réduction de la traînée aérodynamique, aile « active »).

4.6 BILAN COMPARATIF EN TERME DE DENSITÉ D'ÉNERGIE

Comme nous avons pu le voir dans le présent chapitre, les procédés de conversion électromécanique de l'énergie sont nombreux et variés. Cette diversité s'exprime tant par la nature des phénomènes physiques mis en jeu que par les conditions pratiques de leur mise en oeuvre. Aussi, la comparaison objective de leur performance intrinsèque n'en est que plus délicate. Cette confrontation ne peut être raisonnablement menée que lorsque les conditions d'exploitation visées sont parfaitement connues.

Néanmoins, si l'on en reste à un niveau relativement général, l'*énergie* ou la *puissance spécifiques* mises en jeu au cours du processus de conversion représentent sans nul doute des critères importants à retenir. Ainsi, en vue de préciser les domaines d'utilisation propres aux différents effets, on peut s'intéresser aux *contraintes* maximales développées et aux *vitesses de déformation* qui leur correspondent. Le produit de ces deux grandeurs n'est autre que la puissance volumique théorique associée à l'effet considéré.

La figure 4.15 rassemble les performances intrinsèques de différents types de convertisseurs électromécaniques. Les données relatives à d'autres catégories d'effets (muscles biologiques, machine à vapeur, vérin hydraulique) sont également indiquées à titre de comparaison.

Dans le cas des procédés de couplage électro-magnéto-élastique ou thermo-élastique (matériaux électroactifs), les efforts spécifiques portés en ordonnée correspondent directement aux contraintes maximales produites au sein du matériau. Les abscisses s'identifient aux vitesses de déformation maximales en régime harmonique ($\dot{S} = j\omega S$).

Dans le cas des machines tournantes à couplages électrostatique ou magnétostatique, les contraintes indiquées correspondent aux efforts surfaciques tangentiels moyens s'exerçant dans l'entrefer. Quant aux vitesses de déformation, elles rendent compte de la vitesse angulaire de rotation du champ. Pour une machine à entrefer cylindrique, le produit effort $\times$ vitesse spécifiques équivaut par conséquent à la demi-puissance par unité de volume du rotor de la machine.

Il convient cependant de souligner que les données numériques résultant de cette forme de présentation, s'agissant en particulier des puissances par unité de volume, possèdent une signification essentiellement relative. Les effets sont caractérisés d'un point de vue purement intrinsèque, indépendamment de « l'infrastructure » nécessaire à leur mise en oeuvre. Aussi, ces limites théoriques ne doivent en aucun cas être confondues avec les données caractéristiques des convertisseurs opérationnels.

En conclusion, il ressort de cette analyse une certaine complémentarité entre les dispositifs à base de matériaux électroactifs (contraintes élevées - basses vitesses) et les dispositifs électromagnétiques fondés sur la transmission à distance, et donc sans contact, des efforts produits (contraintes limitées - vitesses élevées). Soulignons cependant que les champs d'application potentiellement concernés restent très différents. En effet, la puissance convertie dans les dispositifs à base de matériaux électroactifs ne dépasse pas en général quelques centaines de watt. Aussi, cette technologie émergente ne saurait supplanter la solution électromagnétique face à ses secteurs d'application pérennes (production d'électricité, traction ferroviaire, propulsion navale, etc.). En revanche, ses avantages en termes de force ou de puissance spécifiques constituent un vecteur d'innovation désormais incontournable. Un domaine particulièrement concerné est celui des systèmes électromécaniques « embarqués » (aéronautique, espace, médecine, etc.).

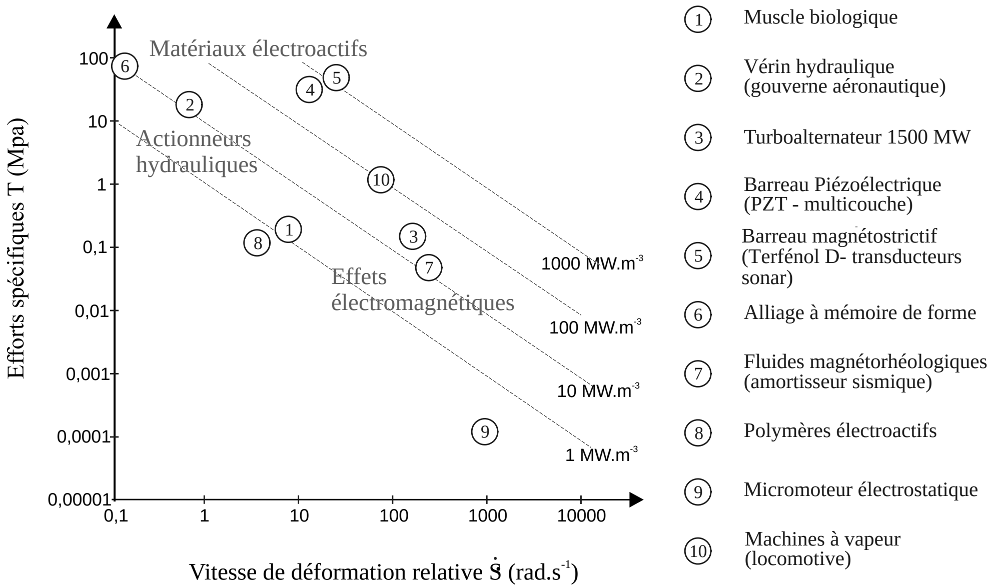


Figure 4.15 Efforts et vitesses spécifiques caractérisant différents types de convertisseurs électromécaniques d'énergie

EXERCICES ET PROBLÈMES

4.1. Actionneur à noyau ferromagnétique tournant

On considère un système électromagnétique au sein duquel interagissent une armature bobinée fixe (stator), parcourue par un courant d'intensité i, et un noyau ferromagnétique tournant (rotor). On suppose que le cicuit magnétique assurant le couplage des deux sources n'est pas saturé (régime linéaire). La loi définissant l'évolution de l'inductance propre l_p de l'enroulement statorique en fonction de l'angle α qui repère la position du noyau polarisable est donnée par (à température constante) :

$$l_p(\alpha) = l_0 + l_2 \cos^2 \alpha$$

où l_0 et l_2 désignent des constantes positives.

a) Écrire l'expression de l'enthalpie libre G_{mag} caractérisant l'état du système opérant à courant et position angulaire donnés.

(Réponse : $G_{\text{mag}}(\alpha, i) = -\frac{1}{2}\left(l_0 + l_2 \cos^2 \alpha\right) i^2$)

b) En déduire l'expression du moment du couple exercé par le stator sur le noyau tournant.

(Réponse : $\gamma = -\frac{1}{2} l_2 i^2 \sin 2\alpha$)

c) Afin d'entretenir la rotation du rotor, on alimente le stator par des créneaux de courants unidirectionnels d'amplitude I, appliqués durant les alternances positives du couple statique. Déterminer dans ces conditions le moment du couple moyen produit par la machine.

(Réponse : $\gamma_{\text{moy}} = \frac{l_2 I^2}{2\pi}$)

d) Représenter le cycle que décrit le point de fonctionnement de la machine dans le plan flux-courant. Déterminer l'aire du cycle balayé et comparer sa valeur au moment du couple moyen précédemment trouvé.

4.2. Transducteur piézoélectrique

On considère un barreau piézoélectrique qui déplace une masse m suivant un axe de translation Ox (on néglige la masse de l'élément piézoélectrique). On désigne respectivement par $f_a(t)$ et $v_a(t)$ la force et la tension auxquelles est soumis le transducteur. Les variables x et q_c correspondent respectivement au déplacement produit à l'extrémité du barreau et à la charge globale accumulée sur ses électrodes. On suppose que la fonction de Lagrange du système s'écrit :

$$L(x, \dot{x}, q_c) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} d^S q_c^2 - \frac{1}{2} k^D x^2 - h q_c$$

où d^S et k^D désignent respectivement le coefficient de capacité inverse à déformation constante et le coefficient de raideur à déplacement électrique constant, h représentant la constante piézoélectrique globale de l'élément.

a) Déduire de l'expression du lagrangien les équations constitutives globales caractérisant le couplage électroélastique dans le transducteur.

(Réponse : $\begin{cases} f = -k^D x - hq_c \\ v = hx + d^S q_c \end{cases}$)

b) Déterminer les expressions de la raideur k^E à champ constant et de la capacité inverse d^T à contrainte nulle.

c) Établir les équations du mouvement gouvernant le fonctionnement du transducteur.

(Réponse : $\begin{cases} m\ddot{x} + k^D x + hq_c = f_a \\ d^S q_c + hx = v_a \end{cases}$)

4.3. Générateur homopolaire à rotor sphérique

D'une manière analogue à l'exemple traité à la section 4.3.6, on peut constituer un générateur électrique à induction à l'aide d'une sphère conductrice aimantée de rayon a, tournant à la vitesse Ω autour de son axe de polarisation magnétique $\mathbf{J}$. Cette dernière est supposée uniforme dans tout le volume du corps. Le système est muni de deux balais fixes M et N frottant respectivement au niveau de l'axe de rotation $\left(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}\right)$ et le long de la ligne équatoriale $(r = a, \theta = 0)$ de la sphère.

a) Le corps étant supposé parfaitement conducteur, déterminer le potentiel du champ électrostatique engendré à l'extérieur de la sphère.

(Réponse : $\Phi = -\frac{2}{9}\frac{a^5}{r^3}\Omega J \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right)$)

b) En déduire la différence de potentiel aux bornes des balais.

(Réponse : $v_{MN} = \frac{1}{3}a^2\Omega J$)

Chapitre **5**

Convertisseurs à effets électromagnétiques

Qu'elle s'opère selon un processus statique (cf. section 4.2) ou dynamique (cf. section 4.3), l'interaction électromagnétique représente un moyen particulièrement judicieux pour créer le mouvement à partir d'une source électrique (moteurs, actionneurs) ou, réciproquement, transformer ce même mouvement en électricité (générateurs, capteurs). Un intérêt majeur de ce type de couplage tient à l'absence de contact direct entre les corps en interaction. On peut alors atteindre des vitesses relatives, et par conséquent des puissances, relativement élevées. La minimisation des effets du frottement constitue un sérieux avantage par rapport aux techniques fondées sur une transmission « par contact » des efforts développés (actionneurs hydrauliques, transducteurs piézoélectriques, etc.). Cet avantage concerne non seulement la maîtrise des rendements de conversion, mais également d'autres critères tels que la réversibilité du transfert d'énergie ou les possibilités de miniaturisation. C'est ainsi que les convertisseurs à effets électromagnétiques se sont largement imposés dans la plupart des applications de l'électromécanique, depuis les micromoteurs « horlogers » de dimension millimétrique jusqu'aux machines décamétriques utilisées pour la production de l'électricité.

Face à une aventure technologique débutée il y a plus de cent cinquante ans, le recencement des structures de machines (et de « machins ») imaginées jusqu'à ce jour constitue sans nul doute une tâche des plus captivantes. En dépit de son intérêt évident au plan épistémologique, l'entreprise n'en demeure pas moins ardue, voire fastidieuse. C'est donc d'une manière parfaitement légitime que les ouvrages consacrés

aux machines électromagnétiques se focalisent le plus souvent sur les technologies donnant lieu aux plus larges développements [**63**][**64**][**65**]. Il convient cependant de souligner que ces technologies font encore l'objet d'innovations significatives, grâce notamment aux progrès constants réalisés dans le domaine des matériaux (aimants permanents, composites magnétiques, supraconducteurs, etc.). Aussi, en amont des structures finalisées, l'objectif du présent chapitre vise-t-il essentiellement à dégager les principaux *concepts* sur lesquels reposent la conception et le fonctionnement des convertisseurs à effets électromagnétiques.

Les modalités pratiques liées à la transmission des forces entre deux sources magnétiques séparées par un entrefer sont tout d'abord examinées. La problématique centrale que constitue la production de champs glissants ou tournants, à partir d'armatures fixes ou mobiles, est ensuite analysée. Les principaux concepts de structures opérationnelles sont alors répertoriés en s'appuyant sur les notions de sources « produite » ou « induite » définies au paragraphe 4.2.5. Une brève analyse des conditions de pilotage du convertisseur et les techniques qui s'y rapportent en termes de commutations électromécanique ou électronique sont enfin abordées.

5.1 COUPLAGE DE SOURCES MAGNÉTIQUES À TRAVERS UN ENTREFER

5.1.1 Principales topologies

Le couplage exploité dans les machines et actionneurs à effets électromagnétiques repose sur les actions mécaniques réciproques subies « à distance » par des sources situées de part et d'autre d'un *entrefer*. Formant les *armatures* du convertisseur, ces sources pourront être indifféremment constituées de milieux *aimantés* ou de *conducteurs* parcourus par des courants.

Selon un premier niveau d'analyse, la nature des forces produites dans le champ électromagnétique (cf. § 2.4.6) conduit à distinguer deux principaux types d'actions. Comme l'illustre la figure 5.1, le couplage mis en jeu sera *normal* si l'on exploite un degré de liberté d'axe perpendiculaire à l'interface séparant les deux armatures. On parlera de couplage *tangentiel* lorsque le déplacement s'effectue par « cisaillement » de l'entrefer. Dans le premier cas, les forces développées sont de nature attractive lorsque le champ dans l'entrefer est principalement dirigé selon un axe perpendiculaire au plan d'interface (cf. tableau 2.4). Elles sont répulsives dans le cas d'une configuration de champ tangente à ce même plan (cas de la figure 5.1 (a)). De même, pour un couplage en mode tangentiel, la mise en jeu d'un champ d'axe oblique permettra, selon son sens d'inclinaison, de produire des efforts de signes opposés.

De par les limitations de course qu'il introduit par principe, le couplage normal concerne essentiellement les dispositifs à débattements limités. Il est notamment utilisé dans les électroaimants qui actionnent les relais et contacteurs électriques.

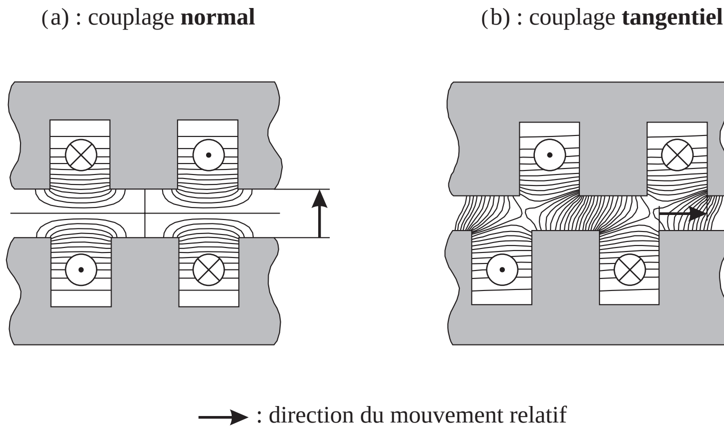


Figure 5.1 Système de deux armatures couplées en mode normal (configuration « répulsive ») ou tangentiel

Le couplage tangentiel constitue donc le mode d'interaction le plus communément exploité dans les convertisseurs à effets électromagnétiques. Utilisé selon un degré de liberté de translation, il donne lieu à la famille des *moteurs ou actionneurs linéaires*. Mais c'est certainement dans les configurations à entrefer cylindrique que le couplage tangentiel se décline le plus couramment, conduisant ainsi à une grande variété de *convertisseurs électromagnétiques tournants*. Dans ces structures, l'entrefer séparant les armatures fixe (stator) et mobile (rotor) peut être orienté selon un plan perpendiculaire à l'axe de rotation (cas des machines discoïdales). Selon une configuration plus répandue, il peut aussi être dirigé radialement (cas des machines cylindriques à rotor intérieur ou extérieur). La figure 5.2 montre ainsi les deux géométries préférentiellement exploitées.

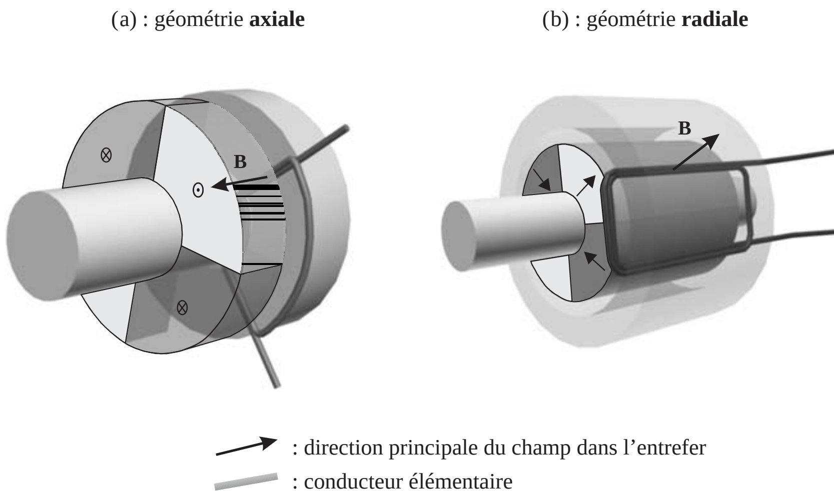


Figure 5.2 Structure schématique des machines tournantes à entrefer axial ou radial

Enfin, d'un point de vue électromagnétique, une distinction fondamentale porte sur la topologie du champ *inducteur* à partir duquel s'opère le couplage électrodynamique. Une première classe de convertisseurs est ainsi fondée sur l'induction *homopolaire* que subit un conducteur en mouvement dans un champ de polarité invariable. Ce procédé découle directement du principe de la machine discoïdale de Faraday. On a pu concrètement en vérifier l'origine relativiste au travers de l'exemple discuté au paragraphe 4.3.6. Au delà de la simplicité structurelle qui le caractérise, le couplage homopolaire souffre cependant de plusieurs inconvénients au plan fonctionnel. Comme en témoigne la figure 5.3 (a), une première difficulté tient au système de contacts glissants nécessairement mis en jeu entre les circuits fixes et mobiles de la machine. Sans ce dernier, le flux magnétique à travers un contour quelconque du circuit conducteur ne peut varier. D'autre part, si les conducteurs élémentaires de la machine se prêtent naturellement à une connexion en parallèle, ils ne sauraient être associés en série, au sein d'un même module, sans annuler la force électromotrice résultante disponible aux bornes du circuit. Aussi, les caractéristiques basse tension - fort courant inhérentes à ce type de convertisseur limitent considérablement leur intérêt pratique. On préfèrera de ce fait adopter la configuration *hétéropolaire* schématisée sur la figure 5.3 (b). La connexion des enroulements élémentaires en série et/ou en parallèle offre ici toute la souplesse requise pour adapter les tensions développées aux caractéristiques des sources connectées à la machine. En outre, la circulation du flux magnétique est grandement favorisée par l'alternance des pôles inducteurs.

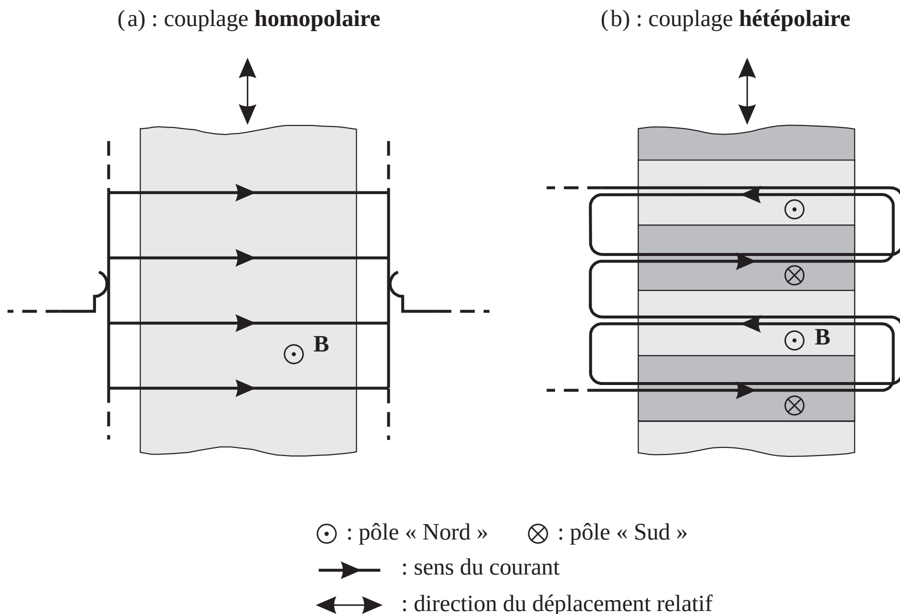


Figure 5.3 Couplage d'un circuit conducteur avec un champ inducteur (**B**) en modes homopolaire ou hétéropolaire

5.1.2 Couplage tangentiel hétéropolaire

Le couplage en mode tangentiel d'armatures hétéropolaires donne lieu à un grand nombre de variantes. Celles-ci se définissent tant par la nature des sources en présence (aimants permanents, milieux polarisables, armatures bobinées) que par la manière dont ces sources sont agencées. Le tableau 5.1 illustre quelques-unes des configurations les plus usuelles.

S'agissant tout d'abord de la constitution des armatures bobinées, la solution la plus immédiate consiste à distribuer directement les conducteurs le long de l'entrefer (cf. tableau 5.1 (a)). Si cette technique fut largement pratiquée par le passé (enroulements bobinés « en anneau » autour d'un tore ferromagnétique), on lui préfère aujourd'hui la configuration *encochée* (cf. tableau 5.1 (b)). Ainsi, en noyant partiellement les conducteurs dans un milieu perméable, on améliore considérablement les performances magnétiques de la structure. Cette technique peut-être aussi bien employée pour l'armature connectée aux circuits de puissance (souvent appelée « induit ») que pour l'enroulement produisant le champ inducteur. Quant aux zones de forte perméabilité situées du côté opposé à l'entrefer, elles constituent les *culasses magnétiques*. Celles-ci favorisent l'écoulement du flux magnétique d'un pôle à l'autre. Afin de limiter les pertes d'origine électromagnétique (pertes par hystérésis ou courants de Foucault), les pièces ferromagnétiques soumises à un champ variable (armatures encochées, culasses etc.) seront le plus souvent réalisées par empilement de tôles magnétiques de faible épaisseur (typiquement de $0,1$ à 1 mm).

Par ailleurs, les conducteurs actifs sont classiquement disposés selon un axe longitudinal (cf. tableau 5.1 (c)). Un agencement transversal est également envisageable, à condition de satisfaire à l'alternance de polarité requise au moyen d'un circuit magnétique approprié (cf. tableau 5.1 (d)). Dans le cas d'une structure rotative, on peut de cette manière réaliser une armature multipolaire à l'aide d'une simple bobine solénoïdale équipée d'un circuit magnétique *à griffes*.

Quant aux armatures aimantées, elles exploitent une grande variété de topologies que nous ne détaillerons pas ici. Dans le cas d'un inducteur à aimants permanents, retenons simplement qu'une solution simple et efficace consiste à disposer les aimants directement à la surface de l'armature (cf. tableau 5.1 (a) ou (b)). On peut également tirer parti de pièces polaires ferromagnétiques dont le rôle est de renforcer, voire de conformer, le champ magnétique au droit du pôle aimanté (structures à concentration de flux etc.). S'agissant des pôles constitués d'un milieu polarisable, ils peuvent être exploités seuls, ou bien en association avec un enroulement assurant leur propre excitation magnétique. Cet agencement donne lieu aux architectures dites *à pôles saillants*, par opposition aux *pôles lisses* engendrés à l'aide d'armatures encochées ou sans encoches. Tel est le cas des deux dernières configurations répertoriées (cf. tableaux 5.1 (e) et (f)). La première procède d'une « coopération » magnétique des armatures s'opèrant à l'échelle du pôle (cf. tableau 5.1 (e)). Afin d'augmenter

les forces tangentielles, on peut avoir l'idée de multiplier les saillances magnétiques responsables de l'inclinaison des lignes de champ dans l'entrefer. On aboutit alors au principe de la coopération dentaire utilisée dans les moteurs à fort couple (cf. tableau 5.1 (f)).

Tableau 5.1 Convertisseurs à couplage hétéropolaire tangentiel : une grande variété d'architectures exploitables

Armatures	
(a) « sans encoches » (○ □ △ : différents enroulements • : conducteur “aller” ×: conducteur “retour”)	**(b)** « encochées »
à enroulement	
(c) « longitudinal » B : conducteur	**(d)** « transversal » B
à coopération	
(e) « polaire »	**(f)** « dentaire »

5.2 CHAMP GLISSANT, CHAMP TOURNANT

5.2.1 Génération d'une onde progressive de courant

À l'aide des architectures précédemment décrites, des actions mécaniques (force ou couple) peuvent être développées entre les parties fixes et mobiles du convertisseur sous l'effet du champ électromagnétique qui couple ses armatures. Toutefois, pour que l'intensité et le sens de ces actions puissent se conserver au cours du mouvement, le champ doit pouvoir accompagner le déplacement relatif des sources. Une question fondamentale repose donc sur la production d'un *champ glissant* (machines linéaires) ou *tournant* (convertisseurs rotatifs) animé d'un mouvement relatif par rapport à l'armature qui lui donne naissance.

Convenons, sans restreindre la généralité, que cette armature soit immobile. Le problème revient alors à créer, à partir de circuits fixes, une source magnétique fictive dont le déplacement imaginaire engendrerait le champ mobile recherché. En d'autres termes, il s'agit de créer une *onde progressive* de courant se propageant le long de l'entrefer. Comme l'illustre la figure 5.4, une telle onde résulte naturellement de l'alimentation par des courants alternatifs convenablement déphasés d'un système de bobines symétriques régulièrement réparties. Considérons pour le prouver deux bobines (B_1) et (B_2) dont les conducteurs (fixes) sont distribués le long de l'entrefer suivant une loi sinusoïdale de la forme :

$$\begin{cases} c_1(x) = C \sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_p}x\right) \\ c_2(x) = C \sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_p}x - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{5.1}$$

où c_1 et c_2 désignent la densité linéique de conducteur associée à chacune des bobines. Cette densité est comptée positivement pour un conducteur « aller » et négativement pour un conducteur « retour ». Les deux fonctions de répartition sont caractérisées par une même amplitude C et une même longueur d'onde λ_p. Cette dernière n'est autre que le double de la distance séparant deux pôles voisins.

Supposons que les bobines (B_1) et (B_2) soient respectivement alimentées par des courants variables d'intensités i_1 et i_2 telles que :

$$\begin{cases} i_1(t) = I \cos(\omega t + \beta) \\ i_2(t) = I \cos\left(\omega t + \beta - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{5.2}$$

où I, ω et β représentent respectivement l'amplitude, la pulsation et la phase à l'origine des courants.

Dans ces conditions, la distribution des sources le long de l'armature fixe se ramène à une densité linéique de courant k définie par :

$$k(x,t) = c_\mu(x)\, i_\mu(t) = CI \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_p}x - \omega t - \beta\right) \quad (\mu = 1, 2) \tag{5.3}$$

La distribution spatio-temporelle de courant obtenue n'est autre que celle d'une onde progressive d'amplitude CI et dont la vitesse de phase s'exprime par :

$$v_\varphi = \lambda_p \omega / 2\pi \tag{5.4}$$

Les bobines (B_1) et (B_2) sont communément appelées enroulements de *phases*. Ce procédé se généralise aisément au cas d'un système de m bobines élémentaires alimentées par un système *polyphasé* équilibré de courants sinusoïdaux (cf. § 6.2.5).

L'onde de courant ainsi obtenue engendre une onde de champ qui se propage à la même vitesse le long de l'interface. L'interaction de ce champ glissant (ou tournant dans le cas d'une géométrique cylindrique) avec un moment magnétique permanent, se déplaçant à la même vitesse, s'effectue donc en régime stationnaire. Cette *condition de synchronisme* permet alors aux forces ou couples s'exerçant entre les deux armatures de présenter une valeur moyenne non nulle.

Remarquons enfin que, pris indépendamment, chaque enroulement de phase génère un champ fixe dont l'intensité est modulée par le courant alternatif qui le traverse. Ce champ *pulsant* possède toutes les caractéristiques d'une *onde stationnaire*. Ainsi, c'est la composition, dans le temps et dans l'espace, du système d'ondes stationnaires attachées aux différents enroulements de phase qui est responsable de la propagation de l'onde progressive magnétique. Nous verrons au chapitre 7 que ce principe général joue également un rôle majeur dans le domaine des convertisseurs à armatures déformables.

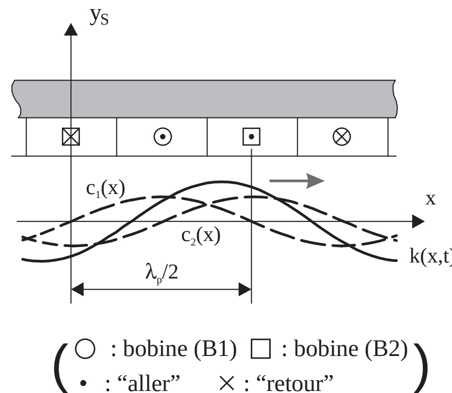


Figure 5.4 Génération d'une onde progressive de courant à l'aide d'une armature diphasée symétrique

5.2.2 Armatures polyphasées

Sur le plan pratique, la constitution d'une armature polyphasée repose, là encore, sur diverses architectures possibles. Le choix de telle ou telle solution dépend étroitement des conditions d'exploitation du convertisseur. Il est évident, par exemple, que

la simplicité requise pour un micromoteur à grande diffusion conduit à des choix technologiques bien différents de ceux qui s'imposent pour un générateur aéronautique à hautes performances massiques.

Le tableau 5.2 décrit différentes configurations couramment exploitées. Le principe général d'un bobinage m-phasé consiste à décaler régulièrement les enroulements élémentaires pour former un système de bobines symétrique. Ramené à la longueur d'onde magnétique λ_p, le décalage spatial entre deux bobines adjacentes correspond donc à λ_p/m, dans le cas général d'un nombre de phases supérieur à 2 (il équivaut à $\lambda_p/4$ dans le cas particulier $m = 2$). Les grandeurs électromagnétiques (flux, force électromotrice etc.) associées à deux phases quelconques se trouvent par conséquent déphasées dans le temps d'un angle multiple de $2\pi/m$ ($\pi/2$ dans le cas diphasé). Pour une machine tournante munie de p paires de pôles, ce déphasage élémentaire équivaut donc à p fois l'angle formé par les axes de deux bobines consécutives.

Compte tenu de sa large prédominance, le système triphasé ($m = 3$) constitue le standard le plus communément adopté pour le bobinage des machines polyphasées (cf. tableaux 5.2 (a) et (b)). Si cette situation se justifie de manière évidente pour les machines directement alimentées par le réseau (triphasé), elle reste vraie pour les groupes pilotés au moyen de dispositifs électroniques statiques. Toutefois, dans ce secteur, la solution diphasée constitue une alternative de plus en plus utilisée, notamment pour les petits moteurs ou actionneurs. Les gains de coûts qu'offre ce choix intéressent tout particulièrement les domaines « grand public » tels que l'automobile, la bureautique ou l'électroménager. Combinée au concept d'armature à enroulement transversal (stator à griffes), cette solution se révèle d'une grande simplicité de mise en oeuvre (cf. illustration du tableau 5.2 (c)).

Remarquons enfin que, dans les configurations précédemment décrites, la circulation du courant dans une même phase génère une polarité magnétique de même rang que celle qui caractérise l'armature opposée. On vérifie en effet, sur les trois exemples du tableau 5.2, que le nombre de bobines constituant une même phase équivaut au nombre de paires de pôle de l'armature aimantée (pour le cas (c), les bobines sont simplement dédoublées). Si elle est satisfaite dans les architectures les plus classiques, cette condition d'*isopolarité* entre les deux armatures n'est cependant pas une nécessité absolue. La figure 5.5 présente un exemple de configuration à nombre *fractionnaire* de bobines par paire de pôle et par phase. Il convient cependant de souligner qu'une séquence *non isopolaire* quelconque ne constitue pas nécessairement un système exploitable en régime polyphasé. Encore faut-il satisfaire à quelques règles d'arithmétique élémentaire visant à assurer un décalage convenable des différents enroulements entre-eux, en cohérence avec la polarité de l'armature en regard[(1)].

(1) Le déphasage des signaux électriques issus de deux bobines adjacentes étant égal à $q \times 2\pi/m$, il faut notamment que le nombre q ne soit pas un multiple de m.

Tableau 5.2 Différentes architectures d'armatures polyphasées

Enroulements de phase :	
(a) « imbriqués » y_{S1} y_{S2} $\lambda_p/3$ (m=3)	(© INPT/ENSEEIHT/D.H.)
(b) « concentrés » y_{S1} y_{S2} $\lambda_p/3$ (m=3)	(© INPT/ENSEEIHT/D.H.)
(c) « à circuit magnétique séparés » y_{S1} y_{S2} $\lambda_p/4$ (m=2)	(© Société EBA)
(○ : phase n°1 □ : phase n°2 △ : phase n°3 • : « aller » × : « retour »)	

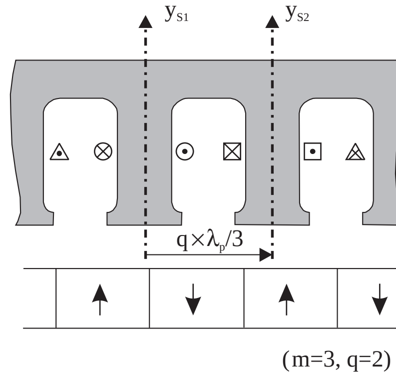


Figure 5.5 Architecture à séquence de phase non isopolaire (nombre fractionnaire de bobines par paires de pôles et par phase)

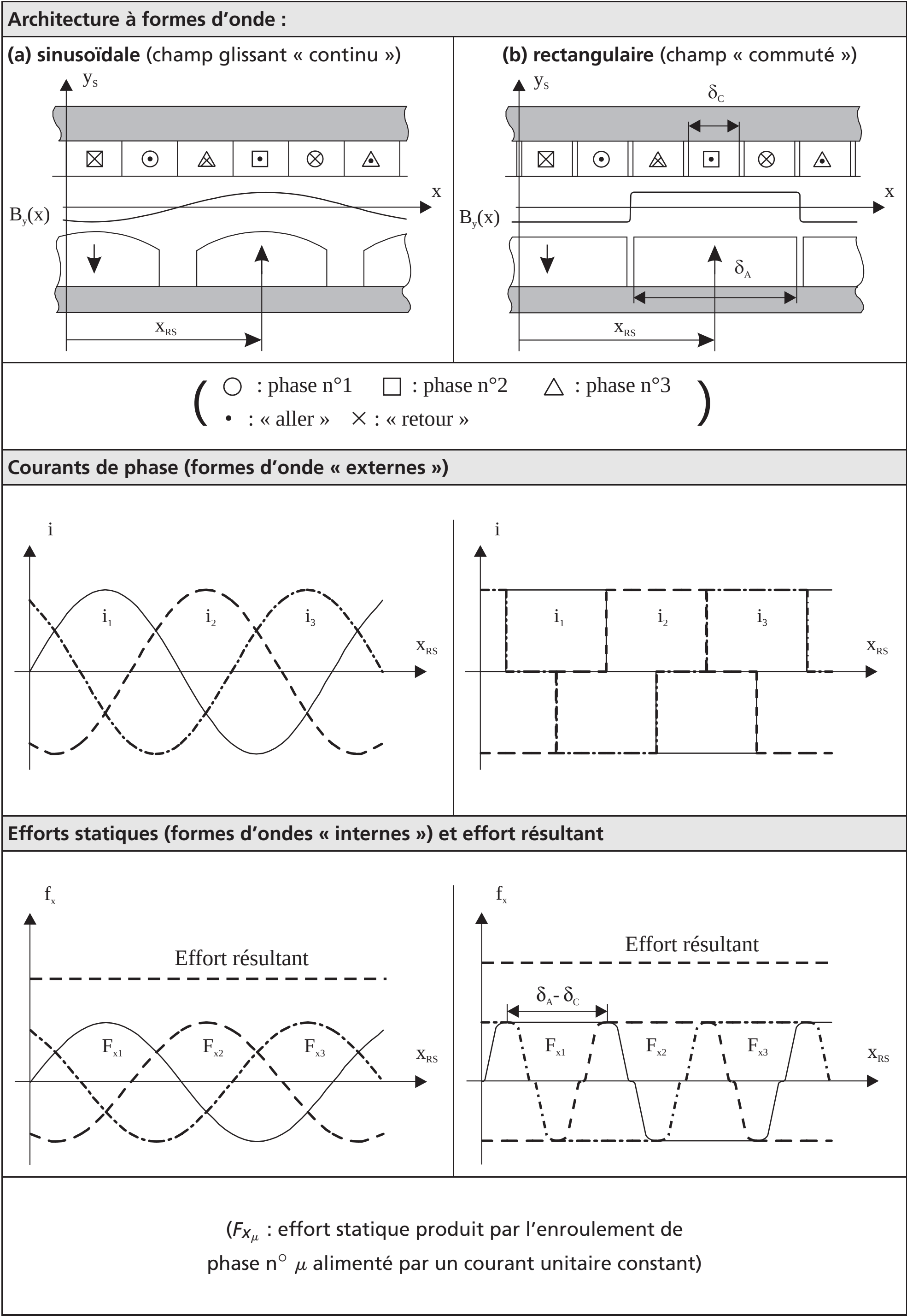
5.2.3 Architectures et formes d'onde

Les concepts décrits auparavant ont été fondés sur le principe d'un couplage *continu* des armatures du convertisseur grâce au champ, glissant ou tournant, qui accompagne leur déplacement relatif. Selon une autre approche, on peut avoir l'idée d'entretenir l'interaction à l'aide d'un champ progressant de manière *séquentielle* le long de l'interface. Ce champ est alors excité suivant un nombre fini de configurations successives, en vue d'accompagner « pas à pas » la partie mobile de la machine durant sa course. En termes d'alimentation, ce procédé suppose que les courants ne varient plus de manière sinusoïdale, mais soient *commutés* d'une séquence d'alimentation à une autre. Il en résulte pour chaque courant de phase une forme d'onde rectangulaire (en « créneau »).

Le tableau 5.3 explicite ces deux techniques appliquées au cas d'une structure de machine idéalisée. Celle-ci est constituée d'un stator triphasé linéaire sans encoches de longueur indéfinie devant lequel se déplace une armature à aimants permanents. L'effort résultant subi par l'armature mobile correspond, au signe près, à la sommation des forces tangentielles produites au sein du bobinage. Ces forces locales sont proportionnelles au produit de la composante normale B_y du champ inducteur (dû aux aimants) par l'intensité du courant au point considéré (forces de Laplace). Dans les deux cas, on souhaite que l'effort résultant demeure constant durant le mouvement. Aussi, la progression du champ généré au stator doit être synchronisée avec le mouvement du champ inducteur (cf. § 5.2.1). Nous rapporterons donc l'évolution de toutes les grandeurs alternatives à la variable x_{RS} qui repère la position de l'armature mobile par rapport au référentiel statorique. Si les aimants se déplacent à vitesse constante, cette variable est proportionnelle au temps.

Lorsque le stator est alimenté par des courants variant sinusoïdalement avec la position de la partie mobile (cf. tableau 5.3 (a)), l'obtention d'un effort constant suppose que la composante B_y soit distribuée le long de l'armature aimantée selon une loi

Tableau 5.3 Couplage d'armatures à formes d'onde sinusoïdale ou rectangulaire



également sinusoïdale. En effet, on montre aisément que l'intégration des forces statiques (sous alimentation continue) produites dans le bobinage, à l'aide d'un champ dont la composante B_y varie sinusoïdalement avec x, engendre un effort statique par phase qui évolue avec la position du rotor selon une loi également sinusoïdale (courbes $F_{x\mu}(x_{RS})$). Dans ces conditions, la somme des contributions propres aux trois enroulements, pondérée par les courants sinusoïdaux $i_\mu(x_{RS})$, produira un effort résultant constant ($f_x = i_\mu \cdot F_{x\mu}$).

L'alimentation du même stator par des courants alternatifs en créneaux (de largeur équivalente à $2/3$ de l'alternance) engendre 6 configurations distinctes de champ dans l'entrefer (cf. tableau 5.3 (b)). Pendant les séquences correspondantes (la durée des commutations est négligée), des courants d'intensité égale et de sens opposés parcourent deux des trois enroulements du stator, le courant étant nul dans la bobine restante. L'obtention d'un effort global constant au cours du mouvement suppose donc que l'action cumulée des 2 phases actives durant chaque séquence (pendant laquelle les courants ne varient pas) produise un effort indépendant de la position de l'armature mobile. Comme le montre le tableau 5.3 (b), cette condition est satisfaite si l'effort statique présente une zone à effort constant durant chacune de ses alternances. Ceci suppose alors que le champ soit réparti le long de l'entrefer suivant une loi rectangulaire.

En conclusion, bien que très sommaire, cette étude montre l'intérêt d'une adéquation entre les formes d'onde *externes* liées aux conditions d'alimentation de la structure et les formes d'onde *internes* caractéristiques du champ produit par ses armatures. Ces grandeurs internes dépendent directement de la géométrie des armatures et des propriétés électromagnétiques des matériaux qui les constituent. Aussi, l'exploitation rationnelle du convertisseur impose une prise en compte conjointe des aspects structurels et fonctionnels(1). Les fluctuations des actions mécaniques produites par la machine sont ainsi minimisées, de même que les fluctuations de la puissance convertie à vitesse constante.

5.3 STRUCTURES OPÉRATIONNELLES

5.3.1 Classification des principaux concepts

Au cours des paragraphes précédents, les modalités pratiques liées à l'interaction de sources électromagnétiques en mouvement relatif ont été examinées d'un point de vue fonctionnel et structurel. Afin d'identifier l'ensemble des principes de conversion qui en découle, il s'agit de considérer les différentes possibilités quant à la nature des sources mises en jeu. À cette fin, l'analyse proposée s'appuie logiquement sur

(1) On pourra aisément se rendre compte, sur l'exemple considéré, des fortes ondulations de force que provoque l'alimentation d'une structure à champ sinusoïdal par des courants en créneaux.

les concepts fondamentaux introduits au chapitre 4 pour caractériser les différentes formes du couplage électromagnétique.

Convenons pour fixer les idées que le convertisseur générique qui sert de base à notre raisonnement soit une machine tournante munie, au stator, d'une armature polyphasée symétrique. Le champ tournant produit par l'armature fixe est à même d'interagir avec différents types de moments magnétiques solidaires de la partie mobile. Le mode d'obtention de ce moment constitue donc un critère tout indiqué pour distinguer les différents principes de conversion exploitables [**66**]. Soulignons que la configuration particulière choisie en guise de référence n'entame en rien la généralité de l'étude. Les principaux résultats obtenus pourront sans difficulté être transposés au cas d'une machine linéaire à champ glissant. D'autre part, les rôles du stator et du rotor pourront être éventuellement interchangés. Ceci suppose simplement la mise en jeu d'un système de couplage galvanique (jeu de contact glissants) reliant les circuits fixes et mobiles de la machine. Nous verrons que ce système peut en outre assurer la fonction de commutation nécessaire à la mise en rotation du champ par rapport à l'armature (cf. section 5.4).

Conformément à la classification des effets élémentaires proposée au paragraphe 4.2.5, le moment supporté par l'armature mobile peut a priori procéder d'une source de type *courant* ou *aimantation*, à caractère *produit* ou *induit*. Dès lors, quatre grands principes de conversion doivent être distingués. Le moment magnétique rotorique peut en effet résulter de l'action exclusive de corps aimantés ou de courants circulant au sein de parties conductrices(1). Dans les deux cas, il peut être soit directement produit (à partir de courants extérieurement contrôlés ou de corps aimantés de manière permanente), soit résulter d'un phénomène dont la cause tient au champ statorique lui-même (courants induits sous l'effet de la variation du champ, aimantation induite au sein d'une armature polarisable).

Le tableau 5.4 décline selon ce point de vue les types de convertisseurs les plus courants. Les désignations utilisées s'appuient sur la terminologie classiquement employée. Soulignons que ces dénominations usuelles mélangent des critères de nature souvent très diverse. Ceux-ci sont liés tour à tour aux fonctionnalités obtenues (machines « synchrones », « asynchrones », « à courant continu »), aux matériaux utilisés (machines « à aimants permanents »), ou encore à la façon dont on conçoit classiquement leur fonctionnement (machines « à réluctance variable »). La présentation adoptée ici s'appuie sur une classification résolument centrée sur la nature des phénomènes physiques mis en jeu. Ce choix tient essentiellement à la variété et la diversité croissantes des structures de machines et d'actionneurs électromagnétiques. Écartant l'idée d'un catalogue exhaustif élaboré sur la base de considérations exclusivement structurelles ou fonctionnelles, l'approche retenue met plutôt l'accent sur les concepts

(1) La notion de source de type « courant » est ici à considérer au sens large. Cette catégorie englobera dans le cas général les armatures bobinées sur des éléments ferromagnétiques (culasses, stators encochés) en vue d'en améliorer l'efficacité magnétique.

élémentaires à partir desquels la conversion d'énergie s'opère. Si ces concepts sont avantageusement combinés dans la plupart des convertisseurs opérationnels, leur caractérisation intrinsèque permettra de déduire d'une théorie unique et générique les propriétés essentielles des machines et actionneurs à effets électromagnétiques. Les bases d'une telle théorie sont exposées au chapitre 6.

Tableau 5.4 Principales classes de convertisseurs à effets électromagnétiques

Nature et caractère du moment	« Aimantation »	« Courant »
« Produit »	Convertisseurs *à aimantation permanente* - machine « synchrone » à inducteur à aimants permanents (rotor) ; - machine « à courant continu » à inducteur à aimants permanents (stator).	Convertisseurs *à double alimentation* - machine « synchrone » à inducteur bobiné (rotor) ; - machine « à courant continu » à inducteur bobiné (stator) ; - machine « à double alimentation ».
« Induit »	Convertisseurs *à aimantation induite* - machine « à réluctance variable » ; - machine « à hystérésis ».	Convertisseurs *à courants induits* - machine « asynchrone » ou « à induction ».

Enfin, de même qu'une onde progressive résulte de la composition de deux ondes stationnaires (cf. § 5.2.1), un champ pulsant (onde stationnaire) peut être décomposé en deux champs tournant ou glissant (onde progressive) à la même vitesse mais dans des sens contraires. Le remplacement de l'armature polyphasée statorique par un enroulement monophasé conduit ainsi à une simplification largement exploitée dans le domaine des machines de petites puissances (de quelques fractions de W à quelques kW). Moyennant des dispositions souvent astucieuses permettant de privilégier une des deux composantes du champ (bobines auxiliaires de démarrage), les principes en vigueur dans le domaine des machines polyphasées seront globalement transposables au cas des structures à alimentation monophasée.

Les quatre principales classes de machines électromagnétiques sont ainsi brièvement illustrées dans leurs formes les plus classiques au cours des paragraphes suivants. L'étude des propriétés électromécaniques de ces structures, à partir d'une modélisation par calcul analytique du champ, fait l'objet de la théorie développée au chapitre 6.

5.3.2 Machines à aimantation permanente

La machine tournante *à aimantation permanente* exploite certainement le principe de conversion le plus intuitif. Celui-ci repose directement sur l'exploitation des actions élémentaires subies par un aimant permanent plongé dans un champ magnétique extérieur tournant. Dans le cas d'une structure à p paires de pôles $\left(\lambda_p = 2\pi/p\right)$,

la vitesse de rotation du champ produit par des courants statoriques de pulsation ω_S est égale, d'après (5.4), à ω_S/p. Par conséquent, la condition de synchronisme traduisant « l'accrochage » magnétique du champ tournant statorique avec le moment rotorique, de vitesse Ω, s'écrira :

$$p\Omega = \omega_S \tag{5.5}$$

Cette condition peut résulter en pratique soit d'un fonctionnement autonome (alternateur *synchrone* à aimant permanent débitant sur un réseau local), soit d'une exploitation à fréquence imposée (machine couplée sur un réseau d'alimentation à fréquence fixe), soit enfin d'un fonctionnement par commutation autopilotée des courants d'alimentation (cf. section 5.4). La structure est dans ce dernier cas associée à un organe de commutation électromécanique de type balais - collecteur à lames (machine *à courant continu* excitée par aimants permanents statoriques) ou à un module électronique d'autopilotage (actionneurs *sans balais* - « brushless » - à aimants permanents rotoriques).

La figure 5.6 montre les parties actives d'une maquette de machine synchrone à aimants permanents à stator sans encoches développée dans le cadre de recherches sur de nouveaux concepts de propulsion navale.



Figure 5.6 Stator et rotor d'un prototype de machine à aimants permanents « terres rares » (SmCo) et stator sans encoches à très faible ondulation de couple (© INPT/CNRS/D.H.)

5.3.3 Machines à double alimentation

En vertu de l'équivalence entre courant et aimantation explicitée au paragraphe 2.2.1, le pendant de la solution à aimants permanents consiste à produire le moment rotorique au moyen de bobinages alimentés par des sources électriques extérieures. Cette

configuration *à double alimentation* impose alors en pratique la mise en jeu d'un système de contacts glissants assurant l'interconnexion des circuits fixes et mobiles de la machine.

Dans le cas général d'une structure symétrique équipée au rotor et au stator d'une armature bobinée polyphasée, les fonctionnalités obtenues résultent de l'interaction de deux champs tournants contrôlés indépendamment. À l'instar du champ statorique, l'intensité du moment magnétique rotorique, de même que son orientation, peuvent désormais être contrôlées par rapport au référentiel lié à l'armature mobile qui lui donne naissance.

Les armatures statoriques et rotoriques étant alimentées par des systèmes polyphasés de courants équilibrés de pulsation respective ω_S et ω_R, la composition de la vitesse du champ rotorique avec sa vitesse d'entraînement mécanique Ω conduit à une condition de synchronisme de la forme :

$$p\Omega = \omega_S - \omega_R \tag{5.6}$$

La vitesse de rotation du convertisseur est ainsi déterminée par la différence des fréquences d'alimentation de ses deux armatures. Dans le cas où ces fréquences sont identiques, le réglage du déphasage entre les deux systèmes de courants polyphasés offre la possibilité d'un contrôle en position du rotor de la machine.

En ce qui concerne le transfert d'énergie réalisé, on peut en dresser le bilan global en multipliant les deux membres de l'équation précédente par le moment γ du couple qu'exerçe le stator sur le rotor. On observe alors que la puissance transmise à la charge mécanique ($\gamma\Omega$) équivaut à la somme algébrique des flux d'énergie que les armatures statoriques et rotoriques communiquent au champ (respectivement $\gamma\omega_S/p$ et $-\gamma\omega_R/p$). Si l'on néglige, en première approximation, les pertes engendrées dans la structure, ces flux d'énergie s'identifient aux puissances fournies par les sources électriques connectées aux circuits statoriques et rotoriques du convertisseur.

Deux cas particuliers importants concernent les structures dont une des deux armatures est alimentée par des courants continus.

Ainsi, la polarisation statique du rotor au moyen d'un courants continus ($\omega_R = 0$) donne lieu aux machines *synchrones* à inducteur bobiné. L'alimentation de l'enroulement inducteur tournant s'effectue généralement à l'aide d'un jeu de doubles bagues tournantes et de balais fixes. Ces machines constituent la solution de référence en matière de production de l'électricité, comme l'illustre la figure 5.7.

La configuration où les courants continus circulent au stator ($\omega_S = 0$) correspond aux machines *à courant continu* à inducteur bobiné. Comme pour la variante excitée par aimants permanents, l'alimentation de l'armature tournante requiert un organe électromécanique combinant les fonctions de contact glissant et de commutation des courants rotoriques.

Les principales fonctionnalités attachées à ces formes particulières de convertisseurs à double alimentation sont comparables à celles de leurs homologues à aimants

permanents. Ces structures bénéficient cependant de la souplesse de commande que procure le réglage du courant continu gouvernant le champ inducteur. En revanche, l'excitation par aimants permanents se révèle sensiblement plus performante. Parmi ses avantages les plus significatifs, on peut citer les gains obtenus en termes d'effort ou de couple massiques (grâce à l'énergie spécifique élevée des aimants permanents modernes), de rendement énergétique (suppression des pertes par conduction dans le circuit inducteur), de maintenance et de durée de vie (suppression des contacts glissants), ou encore d'aptitude aux surcharges transitoires (la faible perméabilité de l'aimant permanent limite la saturation du circuit magnétique de la machine sous l'effet d'une éventuelle surintensité).



Figure 5.7 Roue polaire (à gauche) et armature statorique (à droite) équipant un alternateur hydroélectrique à axe vertical de 800 kVA (© Régie Municipale d'Électricité - Usine du Ramier - Toulouse)

5.3.4 Machines à aimantation induite

Reprenant la configuration de base à armature polyphasée statorique, la production d'un couple électromécanique utile à partir d'un rotor aimanté suppose de manière générale que l'axe du moment magnétique résultant soit décalé par rapport à l'axe de symétrie du champ avec lequel il interagit (cf. § 4.2.3). Les considérations précédemment développées dans le cas du dipôle polarisable montrent que l'obtention de ce décalage peut résulter d'une anisotropie du corps magnétique constituant l'élément mobile (cf. figure 4.2). Ainsi, la polarisation du corps s'effectue préférentiellement selon un axe de facile aimantation communément appelé *axe direct*. Ceci suppose naturellement que le champ possède une composante magnétisante non nulle suivant cet axe. Dans ces conditions, le corps mobile est à même de subir les effets dynamiques du champ, sous l'effet de la composante *en quadrature* qu'il possède perpendiculairement à l'axe direct. En d'autres termes, le moment subit un couple d'origine électromagnétique qui tend à le ramener dans la direction du champ.

L'axe d'aimantation privilégié résulte généralement d'une *anisotropie géométrique* du corps polarisable, ce qui revient en pratique à adopter une architecture magnétique à pôles saillants (cf. § 5.1.2). L'exploitation directe de ces effets donne lieu à la famille des structures classiquement regroupées sous le vocable de machines « à réluctance variable », eu égard aux fluctuations caractéristiques de la réactance de l'armature bobinée lors du déplacement du rotor. Notons en outre que, combinés aux principes de conversion décrits auparavant, ces effets seront très fréquemment mis en jeu au sein de structures à caractère hybride (machines à aimants permanents à pôles saillants).

Remarquons par ailleurs que l'anisotropie requise peut également s'exercer à l'échelle des propriétés magnétiques locales du milieu constituant le rotor, ce qui suppose que les susceptibilités du matériau dans l'axe direct et dans l'axe en quadrature soient distinctes.

Comme nous le montrerons par la suite (cf. chapitre 6), le couple développé est d'autant plus élevé que le « contraste » de susceptibilité magnétique entre l'axe direct et l'axe en quadrature est grand. Ce contraste pourra être encore amplifié en adoptant une structure *à double saillance*, rotorique et statorique (cas des machines dites « à réluctance commutée » ou « Switched Reluctance Drives » dans la terminologie anglo-saxonne). On peut observer sur la figure 5.8 que ce type de machine utilise un rotor de constitution particulièrement simple et robuste.



Figure 5.8 Vue des éléments constitutifs d'un prototype de générateur à aimantation induite destiné à une application aéronautique (© INPT/CNRS/D.H.)

Enfin, en marge des solutions reposant sur une anisotropie du corps polarisable, un deuxième procédé consiste à tirer profit de l'effet déphaseur naturel que procure

l'hystérèse magnétique. Placé dans un champ d'excitation tournant d'intensité suffisamment grande, un cylindre ferromagnétique homogène et isotrope initialement au repos est ainsi susceptible de développer une polarisation accompagnant la rotation du champ avec un déphasage arrière caractéristique de son hystérésis magnétique. Il en résulte un couple d'entraînement capable d'accélérer le cylindre jusqu'à son accrochage avec le champ tournant. La machine fonctionne alors en mode synchrone. Rappelons ici simplement que le concept de *machine à hystérésis* a été largement utilisé dans le domaine des petits moteurs électriques monophasés destinés notamment à l'entraînement des tourne-disques et des magnétophones à bande.

5.3.5 Machines à induction

En vertu des lois de l'induction électromagnétique, un corps conducteur soumis à un champ magnétique variable est le siège de courants induits qui tendent à compenser les variations subies par le champ (cf. section 4.3). Par conséquent, un corps conducteur plongé dans un champ tournant (ou glissant) et animé d'une vitesse différente de celle du champ est susceptible de réagir en développant à son tour un moment magnétique instantané qui cherche à s'opposer au champ d'origine extérieure. Cependant, sous l'effet de la résistivité non nulle qui caractérise le milieu conducteur, la direction du moment antagoniste n'est pas parfaitement opposée à celle du champ produit. Grâce à ce déphasage, un couple électromagnétique peut alors s'exercer entre les armatures fixes et mobiles du convertisseur. L'expression de ce couple sera déterminée au chapitre 6. Soulignons que l'apparition des courants induits, de même que les forces qui en résultent, sont assujetties à l'existence d'un mouvement relatif entre le conducteur et le champ. Ce « glissement » du rotor par rapport au champ statorique justifie la dénomination usuelle de machine *asynchrone*.

Un tel convertisseur peut être directement réalisé à l'aide d'un cylindre conducteur massif tournant au centre d'un stator polyphasé. Toutefois, afin d'améliorer le couplage électromagnétique entre les deux armatures, les conducteurs rotoriques, à l'instar des enroulements du stator, auront avantages à être logés dans des encoches. Ceci suppose néanmoins que le circuit électrique rotorique soit refermé sur lui-même. Selon une première forme de réalisation, les conducteurs sont directement reliés aux extrémités du rotor grâce à un anneau de court-circuit, comme on peut le voir sur la figure 5.9. Simple et économique, cette structure de rotor « à cage d'écureuil » est très largement utilisée dans le domaine des entraînements de petites et moyennes puissances. Par ailleurs, on peut aussi tirer parti d'une architecture à double alimentation dont les circuits rotoriques sont extérieurement court-circuités. Cette configuration « à rotor bobiné » offre alors la possibilité d'ajuster la conductivité apparente du rotor grâce à des résistances extérieures connectées au rotor via le jeu de contacts glissants. Comme nous le verrons en observant l'équation du couple, cette liberté supplémentaire permet d'optimiser les caractéristiques de la machine sur sa plage de fonctionnement (augmentation du couple de démarrage).



Figure 5.9 Constitution d'un rotor « à cage d'écureuil » au moyen de barres conductrices reliées par un anneau de court-circuit (© INPT/ENSEEIHT/D.H.)

5.4 ORGANES DE COMMUTATION

Dans les principes de machine précédemment décrits, le contrôle de la conversion d'énergie repose sur la maîtrise des conditions d'accrochage des sources magnétiques en interaction. Comme nous l'avons vu dans le cas de la machine synchrone, la condition de synchronisme qui traduit cet accrochage peut simplement résulter de la stabilité naturelle dont bénéficie le système machine - charge en régime permanent. Ceci concerne notamment le cas des alternateurs autonomes débitant sur un réseau local, ou encore celui des machines synchrones ou asynchrones couplées au réseau alternatif. Si l'exploitation pratique de telles configurations est par principe relativement simple, la vitesse de rotation du convertisseur demeure cependant assujettie à la fréquence du réseau. En outre, un risque de « décrochage » existe lorsque l'effort demandé est supérieur à celui que peut développer le convertisseur.

Si l'on souhaite s'affranchir de ces difficultés tout en disposant d'un entraînement apte au service *à vitesse variable*, la mise en oeuvre du procédé de conversion doit inclure une stratégie d'*autopilotage*. Celle-ci vise à garantir l'interaction synchrone des champs au sein de la machine, quelles que soient ses conditions de fonctionnement. À cette fin, les circuits de puissance sont alimentés au moyen d'un *organe de commutation* réalisant un *verrouillage de phase* entre les grandeurs d'alimentation (courants ou tensions) et la position de la partie mobile. Des fonctions de contrôle supplémentaires pourront être éventuellement attribuées à cet organe (commande en couple, vitesse).

Pour réaliser l'autopilotage, l'architecture généralement retenue dans les machines *à commutation électronique* utilise un module d'alimentation de puissance (par exemple un onduleur de tension régulé en courant) dont les ordres de commande sont élaborés à partir de l'information de position du rotor. Le schéma de principe d'un tel

système est représenté sur la figure 5.10. L'information de position est généralement fournie par un capteur solidaire de l'arbre de la machine. En vue de simplifier l'architecture matérielle du système, cette information, de même que d'autres grandeurs internes intervenant dans le contrôle du convertisseur (flux, couple), pourront le cas échéant être reconstruites en temps réel à partir de procédés d'estimation numérique (techniques de pilotage « sans capteurs ») [**8**].

Dans le cas des structures à formes d'ondes sinusoïdales (cf. § 5.2.3), la position doit être connue avec une résolution relativement élevée. L'adoption d'une alimentation séquentielle des enroulements permet de réduire sensiblement cette résolution. Ainsi par exemple, dans le cas de la stratégie illustrée dans le tableau 5.3 (b), la mise en rotation du champ est obtenue à l'aide de seulement six configurations prédéterminées. Un capteur à six pas par paires de pôles suffit alors à « déclencher » les commutations de l'onduleur.

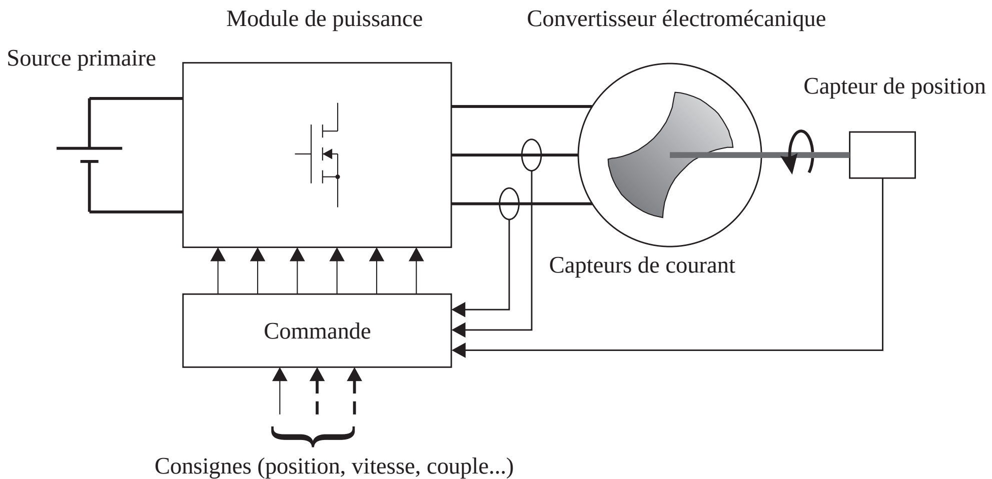
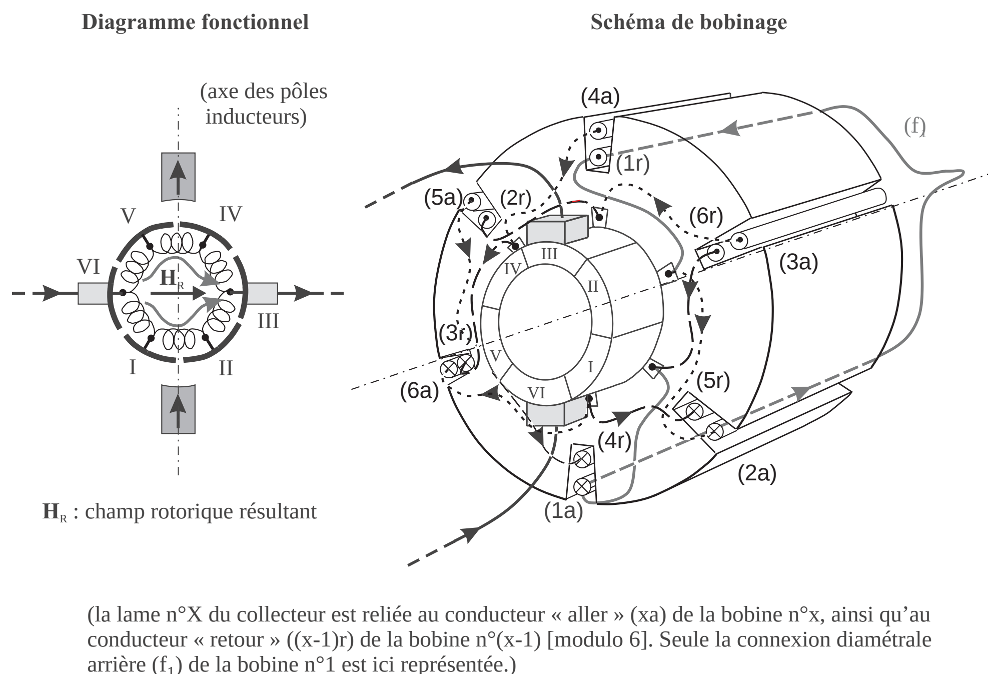


Figure 5.10 Architecture de base d'un convertisseur électromécanique à commutation électronique

Selon un principe fonctionnel similaire, une technique d'autopilotage exploitée dès les origines de l'électrotechnique repose sur la *commutation électromécanique* des circuits de puissance. Ce principe donne lieu aux machines *à collecteur* dont la constitution est illustrée sur la figure 5.11. L'aiguillage du courant dans les différentes sections du bobinage est assuré par un système de balais fixes frottant sur les lames d'un collecteur tournant. Grâce à cette disposition, l'alimentation séquentielle des différentes phases de l'armature mobile (reliées aux lames) est directement assujettie à la position du rotor. Le champ produit par cette armature garde donc une polarité fixe dans le référentiel du stator. Si les balais sont convenablement positionnés par

rapport à l'axe des pôles inducteur statoriques[(1)], la machine développe un couple dont le moment est proportionnel au flux inducteur et à l'intensité du courant continu recueilli au niveau des balais fixes. Les applications de la machine *à courant continu* couvrent une large gamme de puissance, depuis la motorisation des trains jouets (quelques W) jusqu'à la propulsion des grands navires (plusieurs MW). Leur principe reste en outre directement applicable au cas d'une alimentation monophasée. Les *moteurs universels* se sont ainsi révélés très populaires, tout particulièrement dans les applications domestiques, avant que ne percent les techniques de commutation électronique.

Les architectures à collecteur se caractérisent par une intégration fonctionnelle et structurelle relativement poussée, encore difficile à égaler avec les solutions à base d'électronique. Néanmoins, les avantages dont bénéficient les convertisseurs à commutation électronique en termes de performances (puissance massique, rendement), de souplesse de commande ou encore de maintenance, sont désormais incontournables dans la plupart des secteurs d'utilisation de l'électromécanique.



(la lame n°X du collecteur est reliée au conducteur « aller » (xa) de la bobine n°x, ainsi qu'au conducteur « retour » ((x-1)r) de la bobine n°(x-1) [modulo 6]. Seule la connexion diamétrale arrière (f_1) de la bobine n°1 est ici représentée.)

Figure 5.11 Principe de fonctionnement et schéma de bobinage (en « tambour ») d'un rotor de machine à courant continu (collecteur à six lames)

(1) Pour qu'un couple puisse être développé, le champ résultant de la circulation des courants au rotor doit être orienté selon une direction distincte de l'axe du champ inducteur statorique. La direction du champ rotorique coïncidant avec l'axe des balais, la configuration optimale est obtenue pour un calage diamétral des balais suivant un axe perpendiculaire à l'axe des pôles statoriques.

Chapitre **6**

Éléments d'une théorie des convertisseurs électromagnétiques à partir des équations du champ

Les méthodes d'étude classiquement employées en électrotechnique reposent, pour une large part, sur la synthèse de modèles à constantes localisées (schémas électriques équivalents, modèle de Park, graphes énergétiques, etc.). Ces approches constituent de toute évidence une base appropriée pour décrire, sur un plan essentiellement *fonctionnel*, le comportement des systèmes électromécaniques. Les schémas équivalents, naturellement couplés aux circuits d'alimentation, sont régis par les lois linéaires de l'électrocinétique. Les sous-ensembles mécaniques s'insèrent sans peine dans le modèle initial, grâce aux *analogies* classiquement établies entre les systèmes électriques et mécaniques (cf. § 3.2.2).

Toutefois, comme nous avons eu l'occasion de le souligner dès le premier chapitre (cf. § 1.1.2), ce type de représentation ne saurait constituer, à elle seule, une base suffisante pour aborder rationnellement la problématique de conception des structures de conversion. On doit formuler les mêmes réserves quant à la portée pédagogique de ces approches à caractère *global*. Si l'on ne peut que se féliciter de l'engouement actuel pour les représentations énergétiques (schématisation par « Bond Graph »), on doit veiller dans le même temps à ce que les phénomènes physiques agissant à l'échelle *locale* soient convenablement décrits et caractérisés.

Aussi, fidèle à l'idée directrice du présent ouvrage, c'est sur la notion de *champ* que sera fondée la méthode d'étude des convertisseurs à effets électromagnétiques.

À cette fin, le présent chapitre expose les fondements d'une théorie générale visant à décrire le fonctionnement des machines électriques tournantes à partir d'un modèle *physique* [**66**]. Ce modèle repose sur un traitement *analytique* des équations du champ (en deux dimensions). Grâce aux considérations thermodynamiques développées au chapitre 3, les grandeurs résultantes (moment du couple, flux magnétique) sont systématiquement déduites des propriétés du champ. Les expressions obtenues sont naturellement paramétrées en fonction des caractéristiques physiques de la machine. En vue de satisfaire aux objectifs pédagogiques précités, les configurations étudiées correspondent à des structures volontairement idéalisées. Néanmoins, la méthodologie proposée fournit une base de raisonnement que le lecteur saura étendre à des architectures plus sophistiquées, moyennant bien sûr le traitement de problèmes mathématiques élargis en conséquence.

À partir des équations générales établies au chapitre 2, la formulation sur laquelle repose le calcul analytique bidimensionnel du champ est tout d'abord mise en place. La méthode est appliquée dans un premier temps au cas d'un système d'aimantation et de courants donnés, distribués au sein d'une cavité cylindrique. Cette étude préliminaire permet de dégager les propriétés essentielles des principaux types de sources impliquées dans les systèmes électromagnétiques. En combinant les champs dus à ces contributions élémentaires, les équations propres aux différents types de convertisseurs sont alors systématiquement établies. Grâce aux équivalences portant conjointement sur la nature (courant ou aimantation) et le caractère (produit ou induit) des sources en interaction (cf. § 4.2.5), la théorie proposée permet d'englober en une même formulation les quatre concepts fondamentaux de convertisseurs à effets électromagnétiques.

6.1 CALCUL ANALYTIQUE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

6.1.1 Géométrie considérée et hypothèses de travail

La technologie des machines et actionneurs électromécaniques décrite au cours du chapitre 5 donne lieu à une grande variété d'architectures électromagnétiques. Même si l'on se limite au cas usuel du couplage hétéropolaire tangentiel, l'agencement et le mode d'exploitation des sources du champ prennent des formes très diverses que l'on ne saurait réduire à une topologie unique. Toutefois, compte tenu du large développement dont elle a bénéficié jusqu'à présent, la configuration de machine rotative à champ radial, telle que schématisée sur la figure 6.1, s'impose généralement en tant que structure de référence. C'est donc sur la base d'une géométrie *cylindrique*, rapportée à un système (r, θ, z) de coordonnées curvilignes (cf. annexe A.4), que sera développée la présente théorie[(1)].

(1) La formulation obtenue pourra être aisément transposée au cas d'une géométrie linéaire équivalente, de longueur indéfinie et périodique selon l'axe de translation. Il suffira pour cela de transcrire les équations du champ et leur solution dans un système cartésien convenablement orienté.

Le traitement analytique des équations du champ exige de formuler un certain nombre d'hypothèses de travail. Celles-ci concernent tout d'abord la *linéarité* présupposée des milieux aimantés qui constituent la machine. D'autre part, la structure idéalisée servant de base à nos raisonnements (figure 6.1 (b)) se décompose en un certain nombre de couches concentriques, d'épaisseur et de perméabilité constantes, au sein desquelles sont distribuées les sources du champ.

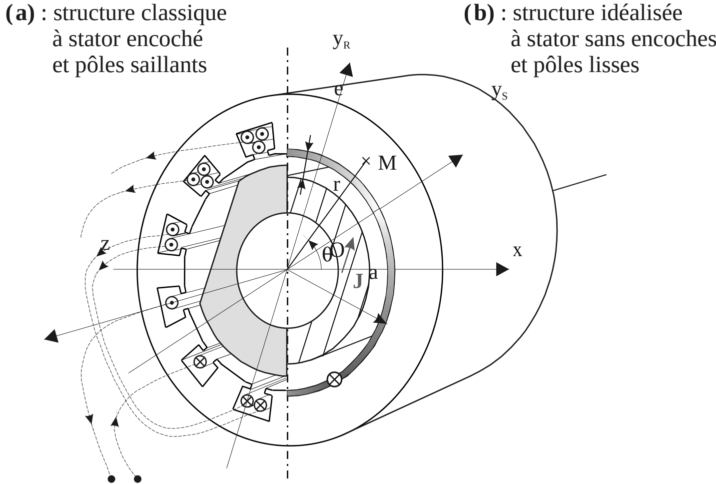


Figure 6.1 Architecture générale des machines cylindriques considérées et structure idéalisée de référence

Négligeant les effets d'extrémité, la structure sera considérée comme *invariante par translation* selon l'axe Oz. Il s'agit alors de résoudre un problème à deux dimensions : le champ et la polarisation magnétique sont contenus dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation (Oz), tandis que le champ électromoteur et les courants sont orientés suivant cette même direction. Pour un tel système, on peut remarquer en effet que, lors d'une réflexion d'espace d'axe Oz (z se change en $-z$, les autres coordonnées restant identiques à elles-mêmes), l'invariance par translation impose à la composante B_z du champ de changer de signe. Or, en vertu des propriétés d'antisymétrie du tenseur champ électromagnétique $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ défini par la formule (2.4), une telle réflexion d'espace doit laisser invariante la composante $\mathcal{F}^{21} = B_z$. Cette dernière est donc nécessairement nulle.

Outre ces hypothèses de base, on peut admettre quelques simplifications supplémentaires. Celles-ci visent essentiellement à alléger les développements analytiques, ce que justifie pleinement la théorie élémentaire proposée dans le présent chapitre. Ainsi, le nombre de zones (couches concentriques) formant le domaine d'étude sera avantageusement réduit en supposant que les culasses intérieures et extérieures qui délimitent le circuit magnétique présentent une perméabilité très grande devant μ_0.

Le champ d'excitation **H** pourra donc être considéré comme nul dans ces zones. La simplification du problème portera également sur les sources du champ, courants ou aimantations, qui interviennent dans la structure. Ces sources seront ramenées soit à des densités de courant superficiels à répartition sinusoïdale, soit à des polarisations magnétiques uniformément distribuées. Enfin, sans restreindre la généralité, le cas d'une architecture *bipolaire* sera plus particulièrement considéré.

6.1.2 Formulation en terme de potentiel vecteur

Compte tenu de l'ensemble des hypothèses précédemment formulées, il est naturel de chercher à résoudre le problème électromagnétique en terme du potentiel vecteur **A** [**67**].

Considérant tout d'abord le cas d'un champ *statique* ou *quasi-statique*, on peut omettre dans les équations générales formulées dans le tableau 2.2 les termes de dérivée temporelle. S'agissant plus particulièrement de l'équation aux potentiels (cf. tableau 2.2 (c)), l'opérateur d'alembertien $\square$ revient dans ces conditions au laplacien Δ (cf. annexe A.7), si bien que l'équation à résoudre s'écrit de manière générale :

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} - \mathbf{rot\,J} \tag{6.1}$$

(équation de *Poisson*).

S'agissant des champs variables à l'origine du phénomène d'induction électromagnétique, ils sont généralement appréhendés dans le cadre de l'approximation des *états quasi-stationnaires* (cf. § 4.3.4). Ainsi, l'équation (6.1) peut encore être utilisée, à condition toutefois de noter que, outre l'effet des courants donnés, la densité de courant libre **j** doit tenir compte des courants induits dans les parties conductrices. En vertu de la loi constitutive linéaire qui caractérise ces milieux ($\mathbf{j} = \sigma_e\mathbf{E}$) et de la relation (2.8) exprimant le champ électromoteur en fonction des potentiels (relations valables dans un référentiel de repos du conducteur), il apparaît donc au second membre de (6.1) un terme en $\mu_0\sigma_e\partial\mathbf{A}/\partial t$. La relation obtenue n'est autre que l'équation de *diffusion* qui régit la distribution des champs et des courants dans les milieux conducteurs en régime variable (dans le cadre de l'approximation précédemment évoquée).

Si l'on tient compte en outre des hypothèses simplificatrices adoptées pour les courants (superficiels) et les aimantations (uniformes), le second membre de l'équation au potentiel est identiquement nul. Le problème est alors gouverné par l'équation :

$$\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{6.2}$$

(équation de *Laplace*).

Le champ **B** étant contenu dans un plan perpendiculaire à Oz (invariance par translation), le potentiel vecteur dont il dérive ($\mathbf{B} = \mathbf{rot\,A}$) est nécessairement dirigé suivant ce même axe. On posera donc $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_z$, où A est une fonction des coordonnées r et θ. L'équation vectorielle initiale, exprimée en coordonnées cylindriques, se ramène

alors à l'équation scalaire (cf. annexe A.6) :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0 \tag{6.3}$$

Cette équation aux dérivées partielles bien connue admet une solution de la forme(1) [**68**] :

$$A(r,\theta) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\nu_{1_\lambda} r^{\lambda} + \nu_{2_\lambda} r^{-\lambda}\right)\left(\nu_{3_\lambda}\cos\lambda\theta + \nu_{4_\lambda}\sin\lambda\theta\right) \tag{6.4}$$

où ν_{1_λ}, ν_{2_λ}, ν_{3_λ}, ν_{4_λ} désignent des constantes réelles. Celles-ci seront identifiées en exprimant les conditions de passage auxquelles le champ est assujetti à l'interface entre deux milieux, conformément aux relations rappelées au paragraphe suivant.

D'autre part, compte tenu de la linéarité du problème, les composantes de rang λ qui figurent dans la solution résultent directement des harmoniques d'espace contenues dans les sources du champ. Si les fonctions de distribution correspondantes sont à répartition sinusoïdale, la solution (6.4) ne comporte qu'un seul harmonique en θ. Le problème revient alors à identifier quatre constantes pour chacune des zones du domaine d'étude.

À l'issue de cette identification, il suffira de prendre le rotationnel du potentiel vecteur, conformément à l'équation (2.10), pour déterminer la distribution du champ magnétique dans la structure. Dans le système de coordonnées cylindriques choisi, il vient ainsi :

$$\begin{cases} B_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial \theta} \\ B_\theta = -\dfrac{\partial A}{\partial r} \end{cases} \tag{6.5}$$

Il convient de noter que les *équipotentielles* de A définissent les lignes de force du champ magnétique(2).

Dès lors, à partir de l'expression du champ, les grandeurs intégrales caractérisant le système (énergie, flux magnétique, moment du couple, etc.) pourront être systématiquement déterminées, de même que les équations macroscopiques décrivant son comportement électromécanique global.

(1) On peut aussi traiter le problème sous forme complexe en recherchant une solution du type :

$$A(r,\theta) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left(\nu_{1_\lambda} r^{|\lambda|} + \nu_{2_\lambda} r^{-|\lambda|}\right) e^{j\lambda\theta}$$

avec $\nu_{i_{(-\lambda)}} = \nu^*_{i_\lambda}$, afin d'assurer le caractère réel de A (le nombre ν^* désigne le conjugué de ν).

(2) La condition $A(r,\theta) = cte$ impose :

$$\frac{\partial A}{\partial r}dr + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta} r\,d\theta = 0$$

ce qui prouve immédiatement que **B** est tangent en tout point du domaine à une ligne équipotentielle d'élément $\mathbf{ds} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta$.

6.1.3 Conditions de passage aux interfaces

Outre les équations gouvernant sa distribution dans un volume donné, le champ électromagnétique est assujetti à des conditions particulières à la traversée de l'interface séparant deux milieux de propriétés différentes. Le tableau 6.1 explicite ces conditions dans le cas général de deux milieux aimantés (M_1) et (M_2), de polarisations respectives $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{J}_2$, séparés par une nappe de courants superficiels de densité $\mathbf{k}_p$.

Tableau 6.1 Conditions de passage à l'interface entre deux milieux aimantés en présence d'une densité de courants superficiels

Conditions sur B (**div B = 0**)	**Conditions sur H** (**rot H = j**)
Formulation vectorielle $\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1\right)=0$	Formulation vectorielle $\mathbf{n}\wedge\left(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1\right)=\mathbf{k}_p$
Formulation en terme de potentiel vecteur $\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)_{r=r_p}=\left(\dfrac{\partial A_2}{\partial\theta}\right)_{r=r_p}$ (a)	Formulation en terme de potentiel vecteur $\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial r}\right)_{r=r_p}+J_{\theta_1}=\left(\dfrac{\partial A_2}{\partial r}\right)_{r=r_p}+J_{\theta_2}+\mu_0 k_p$ (b)
($\mathbf{k}_p=k_p\mathbf{e}_z$: densité de courants superficiels distribués le long de l'interface de rayon $r=r_p$)	

La condition sur le champ magnétique résulte directement du fait que son flux est conservatif. Ainsi, la composante normale de **B** est conservée de part et d'autre de l'interface.

Quant à la condition portant sur **H**, elle exprime la discontinuïté que subit la composante tangentielle du champ d'excitation sous l'effet des courants superficiels éventuellement distribués à l'interface. Ces courants de surface peuvent résulter de la circulation de courants vrais, de densité linéique $\mathbf{k}_p$. Ils peuvent aussi représenter des courants fictifs d'aimantation, en vertu de l'équivalence établie au chapitre 2. Ainsi par exemple, dans le cas d'un milieu aimanté (M_1) accolé à une zone amagnétique (M_2), la condition sur **H** (relation (b) du tableau 6.1) montre que l'aimantation J_{θ_1} est formellement équivalente à une densité de courant $k_m = -J_{\theta_1}/\mu_0$. Cette densité n'est autre que celle du courant d'aimantation superficiel prévu par la relation (2.15).

D'autre part, dans le cas où l'un des deux milieux est caractérisé par une perméabilité très grande devant celle du vide, le champ d'excitation peut être considéré comme nul dans la zone correspondante (**B** et **J** sont alors confondus). De ce fait, la condition sur **H** n'implique plus qu'un seul terme en $\partial A/\partial r$. Ainsi, prenant l'exemple d'un aimant de polarisation **J** accolé à une zone de très forte perméabilité le long de son rayon extérieur r_p, la condition à laquelle doit satisfaire le potentiel vecteur du champ régnant dans l'aimant s'écrira simplement :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)_{r=r_p} = -J_\theta \tag{6.6}$$

6.2 CHAMP PRODUIT PAR UN SYSTÈME D'AIMANTS OU DE COURANTS DANS UNE CAVITÉ CYLINDRIQUE

Le principe de fonctionnement des convertisseurs à effets électromagnétiques repose sur l'interaction de différents types de sources électromagnétiques à base de milieux aimantés ou de circuits conducteurs parcourus par des courants. En vue d'étudier les conséquences macroscopiques d'une telle interaction, il s'agit dans un premier temps de caractériser les propriétés intrinsèques attachées à chacune de ces sources élémentaires. Le calcul analytique du champ constitue un outil tout indiqué pour aborder la question sur la base d'un modèle physique.

6.2.1 Aimant uniformément polarisé

Considérons tout d'abord le cas d'un aimant permanent de forme cylindrique, uniformément polarisé suivant une direction perpendiculaire à son axe de rotation (Oz). L'aimant est placé au centre d'une cavité cylindrique de rayon a, bordée par une zone de très forte perméabilité. On suppose par ailleurs que la perméabilité de recul de l'aimant est très voisine de celle du vide (cf. § 2.3.5), si bien que l'on admettra pour le milieu aimanté une relation constitutive de la forme :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}_p \tag{6.7}$$

où $\mathbf{J}_p$ désigne la polarisation rémanente de l'aimant.

L'axe d'aimantation faisant un angle α avec l'axe polaire du système de référence, les composantes radiales et tangentielles de la polarisation s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} J_r &= J_p \cos(\theta - \alpha) \\ J_\theta &= -J_p \sin(\theta - \alpha) \end{aligned}\right. \tag{6.8}$$

Envisageons tour à tour le cas où l'aimant remplit toute la cavité et celui où sa surface est séparée de la culasse extérieure par un entrefer d'épaisseur e.

a) Cas où l'aimant remplit toute la cavité ($e = 0$)

Les sources du champ ne contenant qu'un seul harmonique en θ, l'expression du potentiel vecteur recherchée est de la forme :

$$A\,(r\,,\theta) = r\,(\nu_3 \cos\theta + \nu_4 \sin\theta) \tag{6.9}$$

en notant que la constante ν_2 figurant dans (6.4) est nécessairement nulle, afin que A reste fini lorsque r tend vers 0.

L'entrefer étant nul, la condition sur H_θ s'identifie à l'équation (6.6) avec $r_p = a$. En conséquence, on obtient pour le potentiel vecteur :

$$A\,(r\,,\theta) = r\,J_p \sin\,(\theta - \alpha) \tag{6.10}$$

d'où :

$$\begin{cases} B_r = J_p \cos\,(\theta - \alpha) \\ B_\theta = -J_p \sin\,(\theta - \alpha) \end{cases} \tag{6.11}$$

Ainsi, pour cette configuration triviale, le champ magnétique régnant dans l'aimant se confond avec la polarisation magnétique $\left(\mathbf{B} = \mathbf{J}_p\right)$, le champ $\mathbf{H}$ étant identiquement nul.

b) Cas où l'aimant fonctionne à travers un entrefer ($e \neq 0$)

Dans ce cas, il convient de distinguer deux expressions du potentiel vecteur, l'une valable dans l'aimant et l'autre dans la zone d'entrefer. Les deux jeux de constantes associées sont identifiés grâce aux conditions de passage entre l'aimant et l'entrefer d'une part, l'entrefer et la culasse d'autre part. La solution du problème est explicitée dans le tableau 6.2.

Comme l'illustre le tracé des équipotentielles de $\mathbf{A}$ représenté sur la figure 6.2, le champ dans l'aimant est uniforme, comme dans le cas $e = 0$. La présence de l'entrefer se traduit cependant par un affaiblissement de l'intensité de $\mathbf{B}$, sous l'effet d'un champ $\mathbf{H}$ dans l'aimant à caractère démagnétisant. Lorsque l'entrefer relatif x_e tend vers l'unité (cas limite d'un aimant fonctionnant dans le vide, loin de toute source magnétique), l'intensité de $\mathbf{B}$ dans le milieu aimanté est réduite de moitié par rapport à la configuration à entrefer nul. Dans le cas où e reste petit devant a, cette atténuation est proportionnelle, en première approximation, à la valeur de l'entrefer relatif(1).

En ce qui concerne le champ dans l'entrefer, sa distribution non uniforme est caractérisée par une variation sinusoïdale de ses composantes radiale et tangentielle le long d'un rayon r donné. L'amplitude de la composante B_θ est un infiniment petit du premier ordre en x_e, tandis que celle de la composante radiale peut être assimilée en première approximation à l'intensité de polarisation J_p. On vérifie que le champ est purement radial le long de la culasse de forte perméabilité ($r \to a$).

(1) Les valeurs d'entrefer mises en jeu dans les machines électriques sont généralement de l'ordre de quelques pourcents du rayon d'alésage.

Tableau 6.2 Expressions du champ engendré par l'aimant cylindrique uniformément polarisé dans les deux zones du domaine d'étude

Zone aimantée ($0 \leqslant r \leqslant a - e$)
$A(r,\theta) = \left[1 - x_e\left(1 - \frac{x_e}{2}\right)\right] rJ_p \sin(\theta - \alpha)$ d'où $\begin{cases} B_r = \left[1 - x_e\left(1 - \frac{x_e}{2}\right)\right] J_p \cos(\theta - \alpha) \\ B_\theta = -\left[1 - x_e\left(1 - \frac{x_e}{2}\right)\right] J_p \sin(\theta - \alpha) \end{cases}$
Zone d'entrefer ($a - e < r < a$)
$A(r,\theta) = \frac{1}{2}(1 - x_e)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] rJ_p \sin(\theta - \alpha)$ d'où $\begin{cases} B_r = \frac{1}{2}(1 - x_e)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] J_p \cos(\theta - \alpha) \\ B_\theta = -\frac{1}{2}(1 - x_e)^2 \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] J_p \sin(\theta - \alpha) \end{cases}$ (où le paramètre $x_e = e/a$ désigne le coefficient d'entrefer relatif)

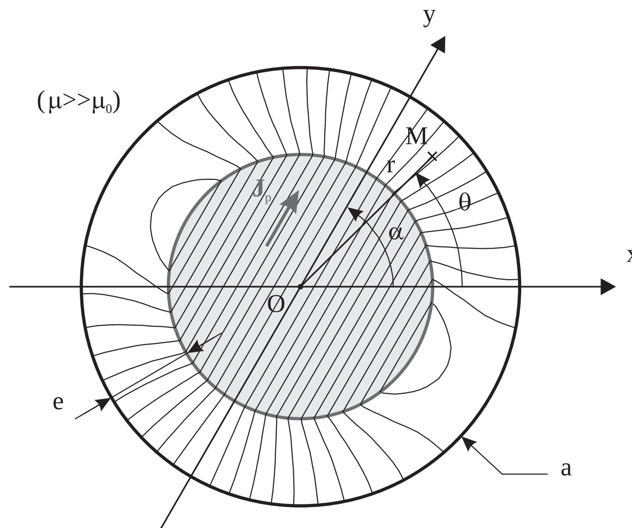


Figure 6.2 Champ produit par un aimant uniformément polarisé placé au centre d'une cavité cylindrique

Si l'on supprime la culasse (ce qui revient à faire tendre x_e vers l'unité), le potentiel vecteur s'exprime par :

$$A_{(x_e \to 1)} = \frac{(a-e)^2}{2r} J_p \sin(\theta - \alpha) \tag{6.12}$$

Les équipotentielles de A à l'extérieur du cylindre aimanté s'identifient alors à des arcs de cercles passant par l'origine et dont les centres sont situés le long de l'axe interpolaire de l'aimant (axe passant par O perpendiculairement à Oy).

Notons enfin que le calcul développé dans le cas de l'aimant permanent reste formellement applicable au cas d'un milieu aimanté polarisable. Si le processus d'aimantation s'opère de manière uniforme, la polarisation permanente $\mathbf{J}_p$ figurant dans les expressions du potentiel vecteur doit simplement être remplacée par la polarisation induite $\mathbf{J}_\chi$. Cette quantité constitue cependant une inconnue du problème. Aussi, c'est en introduisant la relation liant $\mathbf{J}_\chi$ à $\mathbf{H}$ dans le milieu aimanté que le champ résultant pourra être déterminé, comme nous le verrons à l'occasion de l'étude de la machine à aimantation induite (cf. § 6.3.3).

6.2.2 Distribution sinusoïdale de courants superficiels

Grâce à l'équivalence rappelée au paragraphe 6.1.3, le champ dû à une nappe de courants superficiels distribués au sein de la cavité cylindrique se déduit directement du calcul précédent. L'aimant uniformément polarisé est équivalent à une densité linéïque de courants fictifs k_m donnée par :

$$k_m = -\frac{J_\theta}{\mu_0} = \frac{J_p}{\mu_0} \sin(\theta - \alpha) \tag{6.13}$$

Par conséquent, le champ qu'il produit en tout point de la cavité a les mêmes caractéristiques que celui d'une bobine parcourue par un courant i, dont les conducteurs superficiels sont répartis le long du rayon $r = a - e$ selon une loi :

$$c(\theta) = C \sin(\theta - \alpha) \tag{6.14}$$

pourvu que soit respectée l'identité :

$$J_p = \mu_0 C i \tag{6.15}$$

On rappelle que la fonction de distribution des conducteurs $c(\theta)$, d'amplitude C, est comptée positivement pour un conducteur « aller » et négativement pour un conducteur « retour » (cf. § 5.2.1).

Ainsi, dans le cas particulier où la bobine à répartition sinusoïdale est accolée à l'alésage de rayon a, le champ régnant dans la cavité (de perméabilité μ_0) est uniforme et d'intensité $B = \mu_0 C i$.

D'un point de vue énergétique, l'équilibre isotherme de la cavité, de volume V_c, est caractérisé par une enthalpie libre magnétostatique définie par (cf. § 3.4.2) :

$$G_{\text{mag}} = -\int_{(V_c)} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} B_i \, dH_i \, dv = -\int_{(V_c)} \frac{\mu_0 H^2}{2} dv \tag{6.16}$$

Dans le cas particulier de la bobine accolée à l'alésage, il vient immédiatement :

$$G_{\text{mag}} = -\frac{1}{2}\pi a^2 h \mu_0 C^2 i^2 \tag{6.17}$$

où h désigne la hauteur de la cavité (suivant Oz).

Les grandeurs décrivant le comportement global de la structure s'obtiennent de manière générale en dérivant G_{mag} par rapport à la coordonnée généralisée correspondante. Il vient ainsi pour le flux magnétique φ embrassé par la bobine :

$$\varphi = -\left(\frac{\partial G_{\text{mag}}}{\partial i}\right) = \pi a^2 h \mu_0 C^2 i \tag{6.18}$$

Le circuit est donc caractérisé par une inductance propre l_p dont l'expression en fonction des données géométriques du problème est donnée par :

$$l_p = \pi a^2 h \mu_0 C^2 \tag{6.19}$$

6.2.3 Cas d'une cavité équipée d'un noyau central

Au-delà de l'équivalence formelle entre aimantation et courant, le point de vue quantitatif établit une sérieuse distinction entre les sources aimantées et bobinées. Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la densité de courant équivalente à un aimant permanent de performance moyenne : d'après la relation (6.15), une polarisation J_p égale à 1 T (valeur couramment obtenue à l'aide d'un aimant « terre rare ») équivaut à une densité linéique de courant ($K = Ci$) de près de 800.10^3 A.m^{-1}. Cette valeur est 10 à 20 fois plus élevée que les niveaux de charges linéiques limites adoptées dans les machines électriques tournantes, du fait de l'échauffement du bobinage sous l'action de l'effet Joule notamment. Par conséquent, l'obtention de champs permanents d'intensités significatives à l'aide de bobines « à air » reste inconvevable dans le contexte de dispositifs non supraconducteurs.

Reprenant le cas de l'alésage cylindrique, une augmentation sensible du champ produit par la bobine peut être obtenue en jouant sur la perméabilité magnétique globale de la cavité. Pour ce faire, la solution généralement adoptée dans les convertisseurs électromagnétiques tournants consiste à implanter, à l'intérieur de l'alésage, un noyau cylindrique concentrique de forte perméabilité. Cette culasse intérieure fait apparaître un entrefer de faible épaisseur au sein duquel l'intensité du champ est sensiblement renforcée. En vue de quantifier l'effet d'un tel arrangement, on peut déterminer le champ produit par une bobine à distribution sinusoïdale disposée à la périphérie de l'entrefer. La résolution du problème à l'aide de la méthode de calcul analytique précédemment employée conduit aux résultats rassemblés dans le tableau 6.3. Deux configurations sont étudiées, selon que la bobine est accolée à la culasse extérieure ou au noyau intérieur. Les tracés de champ correspondants sont représentés sur les figures 6.3 et 6.4.

On observe ainsi, pour un entrefer relatif x_e supposé faible devant 1, que l'introduction du noyau augmente la composante radiale du champ d'un facteur remarquable

égal à $1/x_e$, en première approximation. Cette conclusion est valable pour les deux cas de figures considérés. L'enthalpie libre magnétostatique caractérisant le dispositif est également affectée du même coefficient, de même que les flux et inductances caractérisant les bobinages implantés dans l'entrefer. Les performances électromagnétiques de la structure sont donc sensiblement améliorées. En outre, afin de simplifier les raisonnements, on pourra baser les développements ultérieurs sur la structure de référence que constitue la cavité cylindrique de perméabilité μ_0. Les principaux résultats concernant le cas usuel d'une structure équipée d'un noyau central seront aisément déduits du cas simplifié en corrigeant les termes d'énergie et les grandeurs qui en découlent du facteur $1/x_e$ (en première approximation).

Tableau 6.3 Expressions du champ produit par une bobine à distribution sinusoïdale disposée le long d'un entrefer cylindrique délimité par deux culasses concentriques de forte perméabilité

Bobine accolée à la culasse extérieure $(r_p = a)$
$A(r,\theta) = \left[\dfrac{1+(1-x_e)^2\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1-(1-x_e)^2}\right]\mu_0 rCi\sin(\theta-\alpha)$ d'où $\begin{cases} B_r = \left[\dfrac{1+(1-x_e)^2\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1-(1-x_e)^2}\right]\mu_0 Ci\cos(\theta-\alpha) \\ B_\theta = -\left[\dfrac{1-(1-x_e)^2\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1-(1-x_e)^2}\right]\mu_0 Ci\sin(\theta-\alpha) \end{cases}$
Bobine accolée au noyau intérieur $(r_p = a - e)$
$A(r,\theta) = \left[\dfrac{1+\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1-(1-x_e)^2}\right](1-x_e)^2\mu_0 rCi\sin(\theta-\alpha)$ d'où $\begin{cases} B_r = \left[\dfrac{1+\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1-(1-x_e)^2}\right](1-x_e)^2\mu_0 Ci\cos(\theta-\alpha) \\ B_\theta = -\left[\dfrac{1-\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1-(1-x_e)^2}\right](1-x_e)^2\mu_0 Ci\sin(\theta-\alpha) \end{cases}$ $(x_e = e/a)$

Soulignons néanmoins que la présence du noyau déforme fortement le champ magnétique dans la cavité. Si la répartition uniforme du champ est conservée à l'intérieur du noyau, les lignes de **B** dans l'entrefer tendent vers une configuration radiale d'autant plus marquée que x_e est faible (sauf au voisinage de l'axe interpolaire). Par ailleurs, l'augmentation de l'intensité du champ reste tributaire d'un comportement linéaire des matériaux magnétiques utilisés. Ainsi, en pratique, les gains obtenus demeureront limités par la saturation magnétique du noyau ou des éléments ferromagnétiques constituant la structure (pour les alliages ferreux classiquement employés, cette limite se situe aux alentours de 1,5 T).

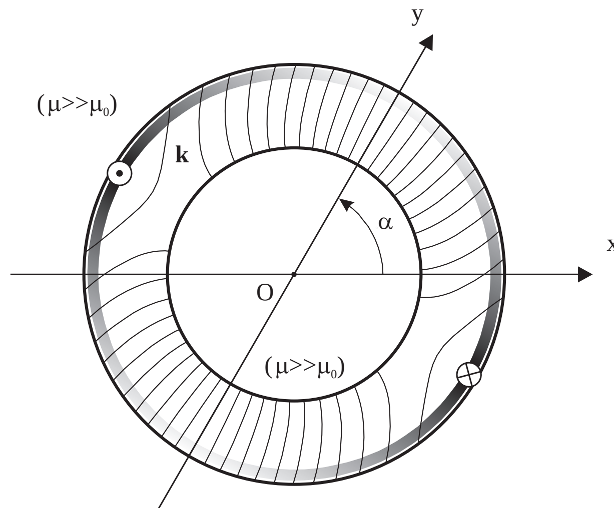


Figure 6.3 Champ produit par une distribution sinusoïdale de courant en présence d'un noyau intérieur (bobine accolée à la culasse extérieure)

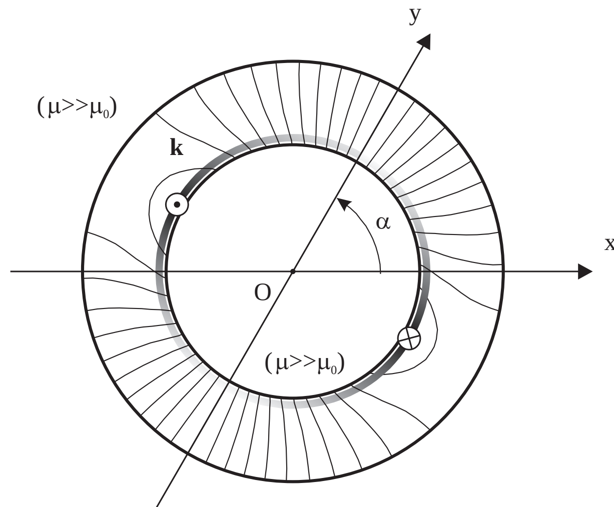


Figure 6.4 Champ produit par une distribution sinusoïdale de courant en présence d'un noyau intérieur (bobine accolée au noyau)

6.2.4 Bobine simple alimentée par un courant alternatif

Lorsque la bobine à distribution sinusoïdale accolée à l'alésage est parcourue par un courant d'intensité variable $i\,(t)$, un champ uniforme d'intensité instantanée $B\,(t) = \mu_0 C i\,(t)$ baigne la cavité de perméabilité μ_0. Dans le cas particulier d'un

courant alternatif sinusoïdal défini par :

$$i(t) = I\cos(\omega t + \beta) \tag{6.20}$$

l'enroulement, supposé fixe par rapport au système de référence (l'angle α est constant), engendre donc un *champ pulsant* d'amplitude $\mu_0 CI$. Pour représenter ces différentes grandeurs, il est commode d'introduire les phaseurs complexes associés. En convenant de confondre l'axe polaire Ox avec l'axe des réels, il vient ainsi pour le phaseur $\underline{B}$ représentant le champ magnétique :

$$\underline{B} = \mu_0 Ci\, e^{j\alpha} \tag{6.21}$$

d'où, en tenant compte de (6.20) :

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 CI}{2}\left[e^{j(\omega t+\alpha+\beta)} + e^{-j(\omega t-\alpha+\beta)}\right] \tag{6.22}$$

On vérifie ainsi que le champ pulsant initial se décompose en deux *champs tournants* de même intensité et animés de vitesses de rotation opposées. Cette propriété donne lieu au principe de fonctionnement d'un grand nombre de machines monophasées (cf. § 5.3.1).

6.2.5 Système de bobines symétriques parcourues par des courants polyphasés équilibrés

En vertu de la linéarité des équations précédemment résolues, le champ dû à l'action combinée de plusieurs enroulements distribués dans la cavité correspond à la somme (vectorielle) des contributions élémentaires. En vue d'obtenir un champ tournant, on peut ainsi avoir l'idée de combiner les effets de plusieurs bobines dont les composantes contra-rotatives s'ajoutent dans un sens et se compensent dans l'autre. On retrouve alors le principe de création de l'onde progressive magnétique décrit au paragraphe 5.2.1 dans le cas d'un système linéaire.

Considérons le cas général d'une armature symétrique constituée de m enroulements de phase dont les conducteurs, accolés à l'alésage, sont distribués selon une loi :

$$c_\lambda(\theta) = C\sin\left[\theta - (\lambda-1)\frac{2\pi}{m}\right] \tag{6.23}$$

(on convient de confondre l'axe de la bobine n$^\circ$1 avec l'axe polaire Ox du système de référence).

L'armature polyphasée ainsi constituée est alimentée par un système de courants sinusoïdaux équilibré défini par :

$$i_\lambda(t) = I\cos\left[\omega t - (\lambda-1)\frac{2\pi}{m} + \beta\right] \tag{6.24}$$

La combinaison spatio-temporelle des densités de courants associées aux différentes phases du bobinage se ramène à une distribution de courants superficiels résultante :

$$k(\theta, t) = c_\lambda(\theta)\, i_\lambda(t) = K \sin(\theta - \omega t - \beta) \quad (\lambda = 1, \ldots, m) \tag{6.25}$$

$$\text{avec} \quad K = \frac{m}{2} C I$$

Ainsi, le système de bobines fixes, parcourues par les courants alternatifs polyphasés de pulsation ω, est magnétiquement équivalent à une bobine fictive de même caractéristique physique que les bobines réelles, tournant à la vitesse angulaire ω et parcourue par un courant continu d'intensité $\frac{m}{2} C I$. Le sens de rotation du champ (uniforme) engendré dans la cavité est déterminé par l'ordre de succession des phases.

Quant à l'enthalpie du système, elle s'obtient immédiatement en substituant dans (6.17) l'amplitude K de la densité de courant (6.25). Il vient ainsi :

$$G_{\text{mag}} = -\frac{m^2}{8} \pi a^2 h \mu_0 C^2 I^2 \tag{6.26}$$

Remarquant de plus que le régime d'alimentation sinusoïdal équilibré est tel que :

$$i_\lambda^2 = i_1^2 + i_2^2 + \cdots + i_m^2 = \frac{m}{2} I^2 \tag{6.27}$$

l'enthalpie s'écrit aussi :

$$G_{\text{mag}} = -\frac{m}{4} \pi a^2 h \mu_0 C^2 i_\lambda^2 \tag{6.28}$$

Dans cette expression, les contributions propres aux différentes phases du bobinage sont formellement découplées, dans la mesure où aucun terme d'interaction (en $i_\lambda i_\mu$ avec $\lambda \neq \mu$) n'y figure. En effet, du fait de la symétrie de l'armature et des courants sinusoïdaux équilibrés qui parcourent ses bobines, l'enthalpie d'interaction globale s'exprime en fonction de la somme des termes propres[(1)]. Aussi, le flux φ_λ embrassé par chacune des bobines de phase s'exprime en fonction du courant i_λ qui la traverse et de lui seul. Il vient ainsi :

$$\varphi_\lambda = -\left(\frac{\partial G_{\text{mag}}}{\partial i_\lambda} \right) = l_c i_\lambda \tag{6.29}$$

$$\text{avec} \quad l_c = \frac{m}{2} \pi a^2 h \mu_0 C^2$$

Le coefficient l_c désigne l'*inductance cyclique* de l'armature polyphasée, grandeur qui tient compte implicitement du couplage magnétique entre les différents enroulements.

(1) Dans le cas particulier important des systèmes triphasés symétriques ($m = 3$), ce découplage formel est assujetti à la seule condition que la somme des courants de phase soit nulle à tout instant.

Notons enfin que, lorsque l'armature polyphasée est elle-même animée d'un mouvement de rotation, sa vitesse d'entraînement s'ajoute algébriquement à la vitesse relative du champ par rapport aux bobinages qui lui donnent naissance. Il est ainsi possible, par exemple, de produire un champ de direction fixe à l'aide d'un rotor polyphasé alimenté par des courants de séquence inversée, synchronisés sur la fréquence de rotation du rotor (cas des machines à courant continu).

6.3 APPLICATION À LA MODÉLISATION DES MACHINES TOURNANTES

Sur la base des considérations précédentes, une théorie élémentaire des principaux types de machines à effets électromagnétiques peut-être élaborée. Dans le cadre des hypothèses simplificatrices initialement admises, il s'agit ainsi d'appliquer le calcul analytique du champ aux quatre concepts fondamentaux de convertisseurs introduits au chapitre 5 (cf. section 5.3). Bien que limitée ici au cas du régime permanent, la méthode d'étude proposée offre l'avantage de fournir une caractérisation fonctionnelle de la structure directement paramétrée en fonction de ses dimensions et caractéristiques physiques. Elle constitue en cela une bonne introduction à la conception et au dimensionnement des convertisseurs électromagnétiques.

6.3.1 Machine synchrone à aimants permanents

En vue de décrire le fonctionnement de la machine synchrone à aimantation permanente (cf. § 5.3.2), on peut en première approche s'intéresser à une structure idéalisée telle que celle de la figure 6.5.

Dans le cas d'un stator m-phasé symétrique alimenté par un système de courants sinusoïdaux équilibré, la source du champ statorique se ramène, conformément aux hypothèses du paragraphe 6.2.5, à une densité de courant superficiel tournante :

$$k_S(\theta, t) = K_S \sin(\theta - \alpha_S) \tag{6.30}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} K_S = \dfrac{m}{2} C_S I_S \\ \alpha_S = \omega_S t - \beta_S \end{cases}$$

où C_S, I_S, ω_S et β_S désignent respectivement l'amplitude de la densité de conducteur statorique, l'amplitude, la pulsation et la phase à l'origine des courants d'alimentation.

Cette distribution de courants crée dans la cavité un champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}_S$ à répartition uniforme dont l'axe (Oy_S) fait un angle α_S avec l'axe du référentiel statorique (Ox_S). L'intensité de $\mathbf{H}_S$ s'identifie à l'amplitude K_S de la densité de courant résultante. Ce champ se superpose en tout point de la cavité à celui que produit l'aimant permanent uniformément polarisé constituant le rotor de la machine.

Dès lors, à partir des expressions données dans le tableau 6.2, on peut calculer l'enthalpie libre magnétostatique qui caractérise le champ résultant (à courants et position angulaire du rotor donnés). Il vient ainsi, après intégration sur le volume de la cavité :

$$G_{\mathrm{mag}} = -\frac{1}{2}\pi a^2 h \mu_0 K_S^2 - \pi a^2 (1 - x_e)^2 h K_S J_p \cos(\alpha_{RS} - \alpha_S) + G_0 \left(\Theta, J_p\right) \quad (6.31)$$

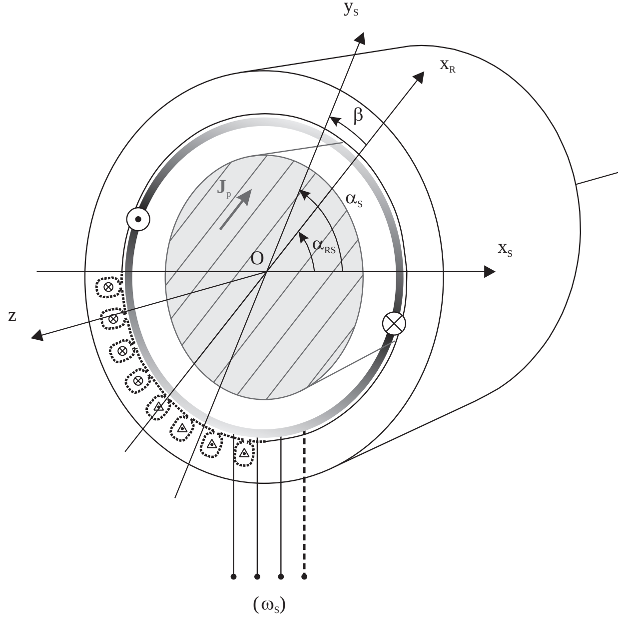


Figure 6.5 Structure idéalisée de machine à aimantation permanente

Le premier et le dernier termes de cette expression rendent compte des énergies propres respectivement associées aux systèmes de courants et d'aimantation (le terme G_0 doit être considéré comme une constante, la polarisation de l'aimant et la température étant fixes). Le terme médian traduit l'interaction de l'aimant avec le champ statorique. Ainsi, en dérivant le potentiel (6.31) par rapport au variables généralisées dont il dépend (la position α_{RS} du rotor et les courants de phase i_{S_λ}), on obtiendra l'expression des grandeurs conjuguées caractérisant le fonctionnement de la machine (respectivement le moment du couple γ et les flux φ_{S_λ}).

a) Couple développé

Le moment du couple γ exercé par l'armature statorique sur l'aimant rotorique (équilibré, en régime quasi-statique, par le moment γ_a des efforts appliqués sur l'arbre de sortie) s'exprime de manière générale par :

$$\gamma = -\gamma_a = -\left(\frac{\partial G_{\mathrm{mag}}}{\partial \alpha_{RS}}\right)_{i_\lambda} = \pi a^2 (1 - x_e)^2 h K_S J_p \sin(\alpha_S - \alpha_{RS}) \qquad (6.32)$$

La production d'un couple de moment moyen non nul est assujettie au synchronisme des champs statorique et rotorique. En posant dans ces conditions :

$$\begin{cases} \alpha_{RS} = \Omega t = \omega_S t \\ \beta = \beta_S \end{cases} \tag{6.33}$$

le moment du couple en mode synchrone s'écrit :

$$\gamma = \pi a^2 (1 - x_e)^2 \, h K_S J_p \sin \beta \tag{6.34}$$

où β désigne l'angle de calage des courants par rapport à la position du rotor (figure 6.5). Le réglage de cet angle permet d'atteindre différentes configurations de fonctionnement de type « moteur » ($\beta \in \,]0, \pi[$ avec les conventions choisies) ou « générateur » ($\beta \in \,]-\pi, 0[$). Le couple maximum, dans le cas d'une alimentation à amplitude de courant fixée, est obtenu pour $\beta = \pi/2$ [mod π].

S'agissant par ailleurs des aspects dimensionnels, on peut simplement remarquer qu'à intensités de polarisation J_p et charge linéique K_S données, le moment du couple délivré par la machine est proportionnel au volume occupé par son rotor.

b) *Relations flux-courant*

Afin de déterminer les flux magnétiques φ_{S_λ} embrassés par chacune des bobines de l'armature statorique, il convient de faire apparaître dans (6.31) les courants de phase i_{S_λ} correspondants. Introduisons à cette fin les phaseurs complexes :

$$\underline{i_{S_\lambda}} = I_S e^{j\left[\omega_S t - (\lambda-1)\frac{2\pi}{m} + \beta_S\right]} \tag{6.35}$$

tels que :

$$i_{S_\lambda} = \mathrm{Re}\left[\underline{i_{S_\lambda}}\right] = \frac{1}{2}\left(\underline{i_{S_\lambda}} + \underline{i_{S_\lambda}^*}\right) \quad \forall \lambda \in \{1, \ldots, m\} \tag{6.36}$$

En remarquant, d'une part, que :

$$I_S^2 = \frac{1}{m}\underline{i_{S_\lambda}}.\underline{i_{S_\lambda}^*} \tag{6.37}$$

et que, d'autre part :

$$K_S \cos(\alpha_{RS} - \alpha_S) = \frac{C_S}{4}\left[\underline{i_{S_\lambda}} e^{j(\lambda-1)\frac{2\pi}{m}}.e^{-j\alpha_{RS}} + \underline{i_{S_\lambda}^*} e^{-j(\lambda-1)\frac{2\pi}{m}}.e^{j\alpha_{RS}}\right] \tag{6.38}$$

l'enthalpie (6.31) peut être directement exprimée en fonction des courants complexes et de leur conjugué. Or, la différentielle de G_{mag} (à position α_{RS} donnée) s'écrit en termes de ces phaseurs :

$$dG_{\mathrm{mag}} = -\varphi_{S_\lambda} di_{S_\lambda} = -\frac{1}{4}\left(\underline{\varphi_{S_\lambda}} + \underline{\varphi_{S_\lambda}^*}\right)\left(\underline{di_{S_\lambda}} + \underline{di_{S_\lambda}^*}\right) = -\frac{1}{4}\left(\underline{\varphi_{S_\lambda}}.\underline{di_{S_\lambda}^*} + \underline{\varphi_{S_\lambda}^*}.\underline{di_{S_\lambda}}\right) \tag{6.39}$$

(les sommes $\underline{\varphi_{S_\lambda}}.\underline{di_{S_\lambda}}$ et $\underline{\varphi_{S_\lambda}^*}.\underline{di_{S_\lambda}^*}$ sont nulles dans la mesure où les flux, à l'image des courants de phase, forment un système polyphasé équilibré de même séquence).

Dès lors, en identifiant terme à terme les deux expressions de la différentielle de G_{mag}, on obtient finalement les relations :

$$\underline{\varphi_{S_\lambda}} = l_{c_S}\underline{i_{S_\lambda}} + \underline{\varphi_{p_\lambda}} \tag{6.40}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} l_{c_S} = \dfrac{m}{2}\pi a^2 h\mu_0 C_S^2 \\ \underline{\varphi_{p_\lambda}} = \pi a^2 (1 - x_e)^2 \, h J_p C_S e^{-j(\lambda-1)\frac{2\pi}{m}} e^{j\alpha_{RS}} \end{cases}$$

Le flux embrassé par les bobines de phase est donc la somme d'une contribution due aux courants circulant dans l'armature statorique elle-même, d'inductance cyclique l_{c_S}, et d'un flux φ_{p_λ} reçu de la part de l'aimant rotorique. Ce dernier tournant à la vitesse de synchronisme ($\alpha_{RS} = \omega_S t$), la dérivée de φ_{p_λ} par rapport au temps définit (au signe près) la force électromotrice induite dans les enroulements de la machine sous l'effet du mouvement. Ainsi, on déduit immédiatement de (6.40) les équations électriques classiques qui gouvernent le comportement de la machine synchrone en régime permanent.

6.3.2 Machines à double alimentation

En vertu de l'équivalence courant-aimantation précédemment explicitée, la théorie simplifiée de la machine à double alimentation (cf. § 5.3.3) se développe selon un schéma de calcul analogue à celui de la machine à rotor aimanté. Comme l'illustre la figure 6.6, il suffit pour cela de remplacer l'aimant rotorique par un courant superficiel équivalent dont la phase est assujettie à celle des courants circulant dans l'armature tournante.

Cette dernière est classiquement distribuée à la surface d'un noyau de forte perméabilité. L'entrefer ainsi défini étant petit devant le rayon d'alésage ($x_e \ll 1$), la perméabilité apparente de la cavité est multipliée, en première approximation, par le facteur $1/x_e$ (cf. § 6.2.3). Par conséquent, on peut déduire des considérations précédentes une enthalpie magnétostatique de la forme :

$$G_{\text{mag}} = G_{\text{mag}_S} + G_{\text{mag}_R} + G_{\text{mag}_{RS}} \tag{6.41}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} G_{\text{mag}_S} = -\dfrac{1}{2}\pi a^2 h \left(\dfrac{\mu_0}{x_e}\right) K_S^2 \\ G_{\text{mag}_R} = -\dfrac{1}{2}\pi a^2 h \left(\dfrac{\mu_0}{x_e}\right) K_R^2 \\ G_{\text{mag}_{RS}} = -\pi a^2 h \left(\dfrac{\mu_0}{x_e}\right) K_S K_R \cos(\alpha_S - \alpha_R) \end{cases}$$

Les deux premiers termes correspondent à l'énergie magnétostatique stockée dans le champ propre de chacune des armatures. Le terme d'interaction témoigne du couplage qui s'exerce entre les deux sources de champ.

Le convertisseur étant alimenté par deux systèmes polyphasés indépendants de courants sinusoïdaux équilibrés, le décalage entre l'axe des composantes statorique

et rotorique du champ s'écrit, avec les conventions adoptées auparavant :

$$\alpha_S - \alpha_R = (\omega_S - \omega_R - \Omega)\, t + (\beta_S - \beta_R) \tag{6.42}$$

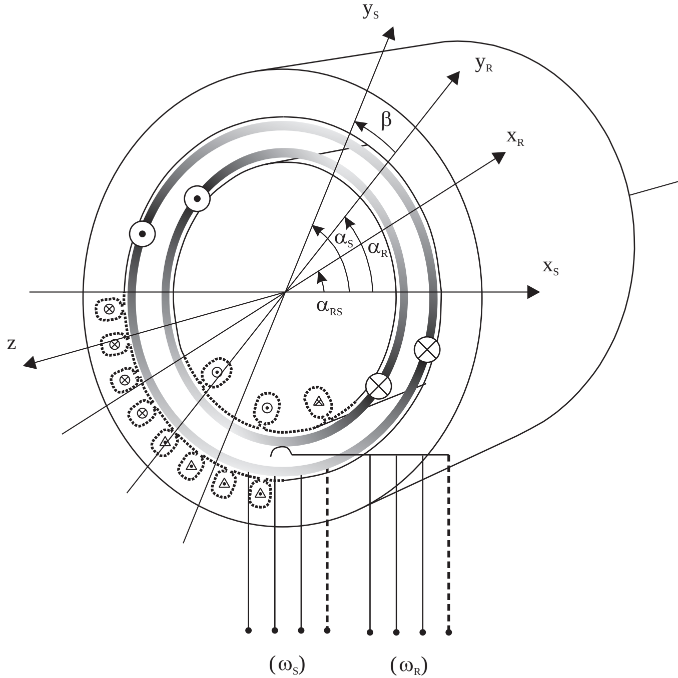


Figure 6.6 Structure de convertisseur à double alimentation

Le synchronisme des champs imposé par la condition (5.6) revient donc à :

$$\alpha_S - \alpha_R = \beta_S - \beta_R = \beta \tag{6.43}$$

où l'angle de calage β définit la phase relative des deux systèmes d'alimentation polyphasés.

La condition de synchronisme étant satisfaite, le moment du couple produit par la machine est alors de la forme :

$$\gamma = \pi a^2 h \left(\frac{\mu_0}{x_e}\right) K_S K_R \sin\beta \tag{6.44}$$

Ainsi, en jouant sur l'angle β, sur la fréquence et l'intensité des courants circulant au stator et au rotor, différents modes de fonctionnement peuvent être exploités. Le sens de rotation est déterminé par le signe de la différence des deux fréquences d'alimentation. Dans le cas où ces fréquences sont identiques, le réglage de l'angle de commande offre la possibilité d'un contrôle en position du rotor de la machine.

S'agissant enfin de l'expression des flux, elle s'obtient à partir d'un raisonnement en tout point similaire à celui développé pour la machine à aimantation permanente. En faisant apparaître les courants instantanés dans la fonction énergétique (6.41), on établira sans peine les relations donnant les flux en fonction des courants de phase statoriques et rotoriques. Figurent dans ces relations linéaires les termes d'inductance cyclique propres aux deux armatures, ainsi que la mutuelle inductance cyclique qui témoigne de leur couplage magnétique global.

6.3.3 Machine à aimantation induite

Le concept de machine à aimantation induite repose sur les effets électromécaniques subis par un corps polarisable anisotrope plongé dans un champ extérieur (cf. § 5.3.4). Comme indiqué sur la figure 6.7, la polarisation du corps mobile (dirigée suivant Oy_R) privilégie un axe direct de facile aimantation $\left(Ox_{R_d}\right)$. Cette polarisation résulte du champ d'excitation statorique produit selon un axe concourant (Oy_S). Le corps mobile est alors soumis à un couple qui tend à ramener l'axe de facile aimantation du rotor dans la direction du champ tournant statorique.

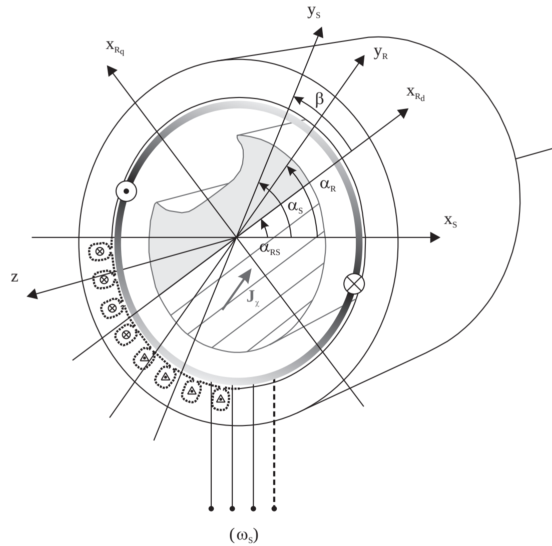


Figure 6.7 Machine tournante à aimantation induite

Le milieu anisotrope constituant le rotor étant exploité en régime linéaire, on peut admettre une loi constitutive de la forme :

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{J}_\chi \tag{6.45}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} J_{\chi_d} = \mu_0 \chi_d H_d \\ J_{\chi_q} = \mu_0 \chi_q H_q \end{cases}$$

où J_{χ_d} et J_{χ_q} désignent respectivement les composantes de la polarisation suivant les axes Ox_{R_d} et Ox_{R_q}, caractérisés par les constantes de susceptibilité magnétique χ_d et χ_q (avec $\chi_d \gg \chi_q$).

Le champ **H** résulte de la superposition des champs dus à la source aimantée rotorique (de polarisation $\mathbf{J}_\chi$ inconnue) et à l'armature polyphasée distribuée au stator. À l'aide des expressions précédemment déterminées pour ces deux types de contributions, la résolution du système d'équation déduit de (6.45) conduit à une polarisation induite définie par :

$$\left\{\begin{aligned} J_\chi &= \mu_0 K_S \sqrt{\left[\frac{\chi_d \cos(\alpha_S - \alpha_{RS})}{1 + \chi_d x_e \left(1 - \frac{x_e}{2}\right)}\right]^2 + \left[\frac{\chi_q \sin(\alpha_S - \alpha_{RS})}{1 + \chi_q x_e \left(1 - \frac{x_e}{2}\right)}\right]^2} \\ \tan(\alpha_R - \alpha_{RS}) &= \frac{\chi_q}{\chi_d}\left[\frac{1 + \chi_d x_e \left(1 - \frac{x_e}{2}\right)}{1 + \chi_q x_e \left(1 - \frac{x_e}{2}\right)}\right] \tan(\alpha_S - \alpha_{RS}) \end{aligned}\right. \tag{6.46}$$

Remarquons que le champ d'excitation associé aux courants statoriques est uniforme (dans le cas de la configuration bipolaire de référence). Aussi est-il légitime de considérer que la polarisation induite au sein du milieu homogène formant le rotor l'est aussi.

Dès lors, le moment du couple s'exerçant sur le rotor s'obtient directement à partir de l'expression précédemment trouvée pour le corps rigidement aimanté. En supposant que la condition de synchronisme des champs est satisfaite ($\Omega = \omega_S$), il vient en substituant dans (6.32) l'expression de la polarisation induite :

$$\gamma = \frac{1}{2}\pi a^2 (1 - x_e)^2 h \frac{\mu_0 \left(\chi_d - \chi_q\right)}{\left[1 + \chi_d x_e \left(1 - \frac{x_e}{2}\right)\right]\left[1 + \chi_q x_e \left(1 - \frac{x_e}{2}\right)\right]} K_S^2 \sin 2\beta \tag{6.47}$$

où l'angle de calage β s'identifie ici à la phase à l'origine β_S des courants statoriques.

Le couple délivré est ainsi d'autant plus intense que le contraste de susceptibilité magnétique entre l'axe direct et l'axe en quadrature est grand. En régime de polarisation linéaire, ce couple varie avec le carré de l'intensité des courants. D'autre part, en raison de la symétrie du rotor, le calage des courants est défini à π près, pour un fonctionnement en « moteur » $\left(\beta \in \left]0, \pi/2\right[\right)$ ou en « générateur » $\left(\beta \in \left]-\pi/2, 0\right[\right)$. Quant au fonctionnement à couple maximum (pour des courants d'amplitude donnée), il résulte d'un calage tel que $\beta = \pi/4 \left[\bmod \pi/2\right]$. Cette situation correspond au meilleur compromis entre l'intensité d'aimantation induite et le décalage de l'axe des champs statorique et rotorique.

L'enthalpie magnétostatique s'exprime selon une expression similaire à (6.31), à un facteur $1/2$ près dû à la dépendance linéaire de $\mathbf{J}_\chi$ vis à vis de **H** (cf. § 4.2.2).

La machine à aimantation induite est ainsi caractérisée par un potentiel de la forme :

$$G_{\text{mag}} = -\frac{1}{2}\pi a^2 h\mu_0 K_S^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 (1 - x_e)^2 hK_S J_\chi \cos(\alpha_S - \alpha_R) + G_0\left(\Theta, J_p\right) \tag{6.48}$$

Conformément à la méthode employée dans le cas du rotor à aimants permanents, la transcription de ce potentiel en termes des phaseurs complexes liés aux courants statoriques permet de déterminer l'expression des flux par phase. Moyennant quelques lignes de calcul, on aboutit alors à une relation entre flux et courant de la forme :

$$\begin{aligned}
&\underline{\varphi_{S_\lambda}} = l_{c_d}\underline{i_{S_{d\lambda}}} + l_{c_q}\underline{i_{S_{q\lambda}}}\\
&\text{avec}\quad \begin{cases} \underline{i_{S_{d\lambda}}} = I_S \cos\beta\, e^{j\left[\omega_S t-(\lambda-1)\frac{2\pi}{m}\right]} \\ \underline{i_{S_{q\lambda}}} = I_S\, j \sin\beta\, e^{j\left[\omega_S t-(\lambda-1)\frac{2\pi}{m}\right]} \end{cases}\\
&\text{et}\quad \begin{cases} l_{c_d} = \dfrac{m}{2}\pi a^2 h\mu_0 C_S^2\left[1 + \dfrac{\chi_d (1-x_e)^2}{1+\chi_d x_e\left(1-\dfrac{x_e}{2}\right)}\right] \\ l_{c_q} = \dfrac{m}{2}\pi a^2 h\mu_0 C_S^2\left[1 + \dfrac{\chi_q (1-x_e)^2}{1+\chi_q x_e\left(1-\dfrac{x_e}{2}\right)}\right] \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Ces relations manifestent à l'échelle globale l'anisotropie magnétique mise en jeu au niveau local. Elles constituent le fondement du modèle classiquement utilisé pour l'étude macroscopique des machines à pôles saillants fonctionnant en régime linéaire.

6.3.4 Machine à induction

Le phénomène d'induction électromagnétique constitue un procédé relativement astucieux pour coupler deux armatures en mouvement relatif (cf. § 5.3.5). Le principe de conversion d'énergie qui en découle n'en demeure pas moins délicat à analyser. Comme nous avons déjà eu l'occasion de le souligner (cf. § 4.4.3), la description de ce type d'effet doit être abordée avec grand soin, du fait notamment de son origine éminemment relativiste. En outre, en terme de modélisation analytique, les formulations « dynamiques » qui en résultent sont à l'évidence plus lourdes à traiter.

Aussi, en vue de décrire le principe de fonctionnement des machines à induction sans pour autant avoir à résoudre l'équation de diffusion (cf. § 6.1.2), nous supposerons que les courants induits se développent au sein d'une couche conductrice d'épaisseur infinitésimale. Comme le montre la figure 6.8, le problème revient alors à déterminer la distribution des courants superficiels induits à la surface du rotor sous l'effet de son mouvement dans le champ électromagnétique.

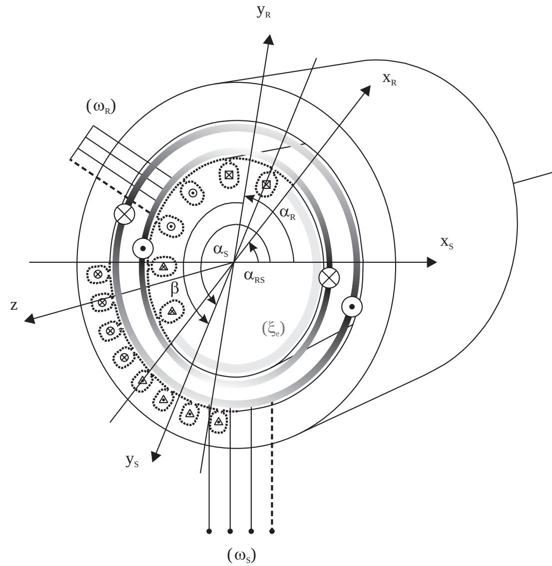


Figure 6.8 Structure idéalisée de machine tournante à induction

Dans un système de repos du conducteur, la loi constitutive de la couche conductrice peut s'écrire :

$$\mathbf{k}'_R = \xi_e \mathbf{E}' \tag{6.50}$$

où ξ_e désigne la conductivité superficielle de la couche. Les grandeurs primées se rapportent à un repère lié au rotor, d'axe polaire Ox_R. Le changement de référentiel s'obtient par simple transformation des coordonnées angulaires en faisant $\theta = \theta' + \alpha_{RS}$. Rappelons que, dans le cadre de l'approximation galiléenne, la transcription de la loi constitutive écrite dans le référentiel fixe exigerait, conformément à (4.31), de tenir compte du terme en $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$.

Compte tenu de l'hypothèse d'invariance par translation, l'équation vectorielle (6.50) revient à une écriture scalaire impliquant les composantes suivant Oz de la densité de courant induit $\left(k'_R\right)$ et du champ électromoteur $\left(E'\right)$.

Supposant des conditions de court-circuit idéales aux extrémités du cylindre conducteur, le champ électromoteur est donné, au signe près, par la dérivée temporelle du potentiel vecteur (dans le référentiel de repos du conducteur). Par conséquent, la densité de courant induit est assujettie à l'équation :

$$k'_R = -\xi_e \left.\frac{\partial A'}{\partial t}\right|_R \tag{6.51}$$

où A' désigne le potentiel vecteur du champ résultant (dû aux courants produits et induits) rapporté au référentiel rotorique.

Le conducteur tournant à vitesse constante ($\alpha_{RS} = \Omega t$), et l'excitation du champ produit au stator étant de nature parfaitement sinusoïdale, la résolution de l'équation

(6.51) conduit à rechercher pour la densité de courant induite au rotor une solution harmonique. La pulsation rotorique s'identifie alors à la vitesse relative du champ statorique par rapport au milieu conducteur ($\Omega = \omega_S - \omega_R$). À l'aide des expressions du potentiel vecteur données dans le tableau 6.3 (en convenant de négliger les termes infiniment petits en x_e d'ordre supérieur à 1), la résolution de l'équation conduit à une densité de la forme (exprimée dans le référentiel statorique) :

$$k_R(\theta, t) = K_R \sin\left[\theta - (\omega_R + \Omega)t - \beta_R\right]$$

$$\text{avec} \quad \left\{ K_R = \frac{\left(\frac{\mu_0}{x_e}\right)\xi_e a\,|\omega_R|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0}{x_e}\right)^2 \xi_e^2 a^2 \omega_R^2}} K_S \quad \tan\beta = -\frac{1}{\left(\frac{\mu_0}{x_e}\right)\xi_e a \omega_R} \right. \tag{6.52}$$

$$\text{sachant que} \quad \left\{ \beta = \beta_S - \beta_R \quad \beta \in \left[-\pi, -\pi/2\right] \cup \left[\pi/2, \pi\right] \right.$$

Le moment du couple exercé par l'armature statorique sur le cylindre conducteur se déduit directement de l'expression (6.44) établie pour la machine à double alimentation. On obtient finalement :

$$\gamma = \frac{\pi a^3 h \left(\frac{\mu_0}{x_e}\right)^2 \xi_e \omega_R K_S^2}{1 + \left(\frac{\mu_0}{x_e}\right)^2 \xi_e^2 a^2 \omega_R^2} \tag{6.53}$$

Le couple développé est directement fonction de la pulsation des courants induits. On distingue ainsi plusieurs modes de fonctionnement, de type « moteur » ($0 < \Omega < \omega_S$), « frein à contre-courant » ($\Omega < 0$), où générateur ($\Omega > \omega_S$).

Dans le cadre d'un fonctionnement à amplitude de courants statoriques imposée, l'expression trouvée fait apparaître un maximum (en valeur absolue) défini par :

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2}\pi a^2 h \left(\frac{\mu_0}{x_e}\right) K_S^2 \tag{6.54}$$

Il est intéressant de noter que cet optimum correspond à un angle de calage β entre l'axe du moment magnétique rotorique induit et l'axe du champ statorique égal à $\pm 3\pi/4$. Ainsi, à l'instar de la machine à aimantation induite, l'exploitation optimale (en terme de couple) du processus de conversion par courants induits repose sur un compromis entre l'intensité des courants induits au rotor et leur déphasage par rapport au système de courants statoriques.

Enfin, on vérifiera aisément en calculant la puissance dissipée par effet Joule dans la couche conductrice que la conversion d'énergie réalisée satisfait au bilan global précédemment évoqué dans le cas de la machine à double alimentation (cf. § 5.3.3) : la puissance transmise à la charge mécanique ($\gamma\Omega$) équivaut au flux d'énergie communiqué au champ par l'armature statorique ($\gamma\omega_S$) diminué de la puissance dissipée dans le rotor ($\gamma\omega_R$).

EXERCICES ET PROBLÈMES

6.1. Générateur à aimants permanents

On considère une machine à aimants permanents à stator m-phasé dont le comportement électrique linéaire est régi par les équations (6.39).

a) Déterminer l'amplitude de la force électromotrice disponible aux bornes d'une phase du stator.

(Réponse : $E = \pi a^2 (1 - x_e)^2 h J_p C_S \Omega$)

b) Négligeant la résistance ohmique des enroulements, montrer que l'intensité du courant produit lors d'un fonctionnement en court-circuit symétrique est indépendante de la vitesse de rotation.

c) Les enroulements de la machine étant connectés à un système de m résistances identiques dont la valeur équivaut à la réactance de la machine, déterminer l'intensité du courant délivré et le calage correspondant.

(Réponse : $I_S = \dfrac{\sqrt{2}(1 - x_e)^2 J_p}{m \mu_0 C_S} \quad ; \quad \beta = -\dfrac{\pi}{4}$)

6.2. Champ produit par un inducteur à aimantation périphérique

On considère une structure cylindrique invariante par translation suivant l'axe Oz constituée d'une couronne aimantée d'épaisseur b et de polarisation magnétique uniforme d'intensité J_p. L'axe de polarisation fait un angle α avec l'axe polaire de référence. Cette couronne est accolée, le long de son rayon extérieur a, à un cylindre ferromagnétique externe ($a > b$). On suppose que la perméabilité de la culasse extérieure est grande devant celle de la cavité intérieure, de perméabilité μ_0.

a) Déterminer les expressions du potentiel vecteur dans les deux zones du domaine d'étude.

(Réponse : $A_1 (r, \theta) = \dfrac{1}{2} J_p \left[1 - \left(1 - \dfrac{b}{a}\right)^2\right] r \sin(\theta - \alpha)$

pour $0 < r < a - b$;

$A_2 (r, \theta) = J_p \left[\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)^2\right) r - \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{r}\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)^2\right] \sin(\theta - \alpha)$

pour $a - b < r < a$)

b) En déduire l'intensité du champ uniforme produit dans la cavité ;

(Réponse : $B = \dfrac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \dfrac{b}{a}\right)^2\right] J_p$)

6.3. Champ engendré par une armature bobinée multipolaire

On constitue une armature multipolaire en disposant une densité de courants superficiels $k(\theta) = K\sin(p\theta - \alpha)$ le long d'un entrefer cylindrique d'épaisseur e, délimité par un alésage de rayon a au centre duquel est placé un noyau polarisable. La perméabilité du noyau central et celle de la culasse extérieure sont supposées très grandes devant celle de l'air. On désigne par $x_e = \dfrac{e}{a}$ le coefficient d'entrefer relatif.

a) Les courants étant accolés à l'alésage, déterminer l'expression du potentiel vecteur caractérisant la distribution du champ magnétique dans l'entrefer.

$$\text{(Réponse : } A(r,\theta) = \frac{\left[1 + (1 - x_e)^{2p}\left(\frac{a}{r}\right)^{2p}\right]}{pa^{p-1}\left[1 - (1 - x_e)^{2p}\right]} r^p \mu_0 K \sin(p\theta - \alpha)\text{)}$$

b) Reprendre la question dans le cas où les courants sont accolés au noyau.

$$\text{(Réponse : } A(r,\theta) = \frac{\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^{2p}\right]}{pa^{p-1}\left[1 - (1 - x_e)^{2p}\right]} (1 - x_e)^{p+1} r^p \mu_0 K \sin(p\theta - \alpha)\text{)}$$

c) Représenter l'allure des lignes de champ dans l'entrefer.

6.4. Couplage magnétique de deux armatures polyphasées

Considérons deux armatures m-phasées symétriques couplées magnétiquement à travers un entrefer d'épaisseur e. Les enroulements sont disposés à l'intérieur d'une cavité cylindrique bordée par une culasse de forte perméabilité devant celle de l'air. On suppose que le couplage est décrit au moyen d'une enthalpie magnétostatique G_{mag} donnée par (6.40). On rappelle que la différentielle de G_{mag} à calage mécanique des deux systèmes fixé ($\alpha_{RS} = cte$) s'écrit :

$$dG_{\text{mag}} = -\varphi_{S_\lambda} di_{S_\lambda} - \varphi_{R_\mu} di_{R_\mu}$$

où les courants i_{S_λ} et i_{R_μ} circulant dans les bobines de phase des deux armatures sont définis d'une manière analogue à (6.24).

En introduisant les phaseurs complexes des courants et des flux, conformément à la méthode employée au paragraphe 6.3.1, exprimer les relations liant les flux aux courants (dans le cadre d'un développement limité au premier ordre en $x_e = e/a$).

$$\text{(Réponse : } \left\{\begin{array}{l} \underline{\varphi_{S_\lambda}} = l_{c_S}\underline{i_{S_\lambda}} + m_{c_{RS}}\underline{i_{R_\mu}} \\ \underline{\varphi_{R_\lambda}} = m^*_{c_{RS}}\underline{i_{S_\lambda}} + l_{c_R}\underline{i_{R_\mu}} \end{array}\right. \quad \text{avec} \left\{\begin{array}{l} l_{c_S} = \dfrac{m}{2}\pi a^2 h\left(\dfrac{\mu_0}{x_e}\right) C_S^2 \\ l_{c_R} = \dfrac{m}{2}\pi a^2 h\left(\dfrac{\mu_0}{x_e}\right) C_R^2 \\ m_{c_{RS}} = \dfrac{m}{2}\pi a^2 h\left(\dfrac{\mu_0}{x_e}\right) C_S C_R e^{-j\alpha_{RS}} \end{array}\right.$$

Chapitre 7

Piézoactionneurs et piézomoteurs

Lorsque la fonctionnalité recherchée se définit moins en termes de puissance ou de vitesse que par la force ou le couple que l'on souhaite produire, les procédés de couplage locaux par voie électro-magnéto-élastique (piézoélectricité, magnétostriction, etc.), voire électro-thermo-élastique (alliages à mémoire de forme), constituent une alternative pertinente à la solution électromagnétique. Ainsi, grâce aux progrès significatifs accomplis au cours des dernières décennies dans la synthèse et la mise en oeuvre des *matériaux électroactifs*, une nouvelle génération d'actionneurs électromécaniques a vu le jour. Regroupés sous la dénomination de *piézoactionneurs*, ces dispositifs tirent directement parti des déformations engendrées dans la matière sous l'effet du champ électromagnétique. Si les contraintes mécaniques qui en résultent sont intenses (cf. section 4.6), les déplacements obtenus n'en demeurent pas moins limités. Aussi, c'est grâce à la mise en jeu d'actions de contact que l'on pourra exploiter ces efforts élevés le long de courses macroscopiques. Cette double transformation de l'énergie définit alors le concept de *piézomoteur*. Une large part de ces dispositifs étant excitée sous hautes fréquences, certains auteurs ont adopté la dénomination de *moteurs à ultrasons* [**69**][**70**].

Compte tenu de l'effort de recherche soutenu dont ils bénéficient à l'heure actuelle, les actionneurs et moteurs à base de céramiques piézoélectriques font plus particulièrement l'objet de ce dernier chapitre.

La forme particulière que revêt le couplage piézoélectrique dans les céramiques ferroélectriques de type PZT est tout d'abord examinée. Les conditions de transformation de l'énergie en mode quasi-statique et résonnant sont tour à tour analysées. La théorie élémentaire des convertisseurs résonnants est élaborée sur la base d'une formulation lagrangienne dont les fondements ont été établis aux chapitres 2 et 3. Le principe d'un entraînement par mouvement vibratoire, transmis par effet de contact, est ensuite discuté d'un point de vue essentiellement fonctionnel. Enfin, quelques exemples de moteurs ou d'actionneurs particulièrement représentatifs de cette technologie en plein essor illustrent concrètement le potentiel d'innovation qu'elle représente.

7.1 CÉRAMIQUES PIÉZOÉLECTRIQUES

7.1.1 Généralités

La mise en évidence, au cours des années 1950, des propriétés remarquables des *céramiques ferroélectriques* de type PZT ($PbZr_{1-x}$-Ti_xO_3 avec $x \simeq 0,5$) constitue un tournant dans l'histoire de la piézoélectricité. En effet, comparés aux matériaux naturels tels que le quartz (SiO_2) par exemple, les constantes de charge qui caractérisent ces composés de type pérovskite (ABO_3) sont environ 100 fois plus élevées (cf. § 4.4.2). Aussi, les applications industrielles de la piézoélectricité sont largement tributaires des possibilités offertes par ces matériaux synthétiques [**71**].

Obtenue par frittage d'oxydes ou de sels de plomb, de zirconium et de titane, la structure de ces matériaux est de nature polycristalline. L'alignement des moments dipolaires spontanément engendrés au sein des domaines élémentaires est obtenu à l'issue d'une étape de polarisation sous champ électrique intense. On crée de cette manière les conditions d'anisotropie nécessaire à l'existence de la piézoélectricité. À l'instar des matériaux ferromagnétiques, les propriétés piézoélectriques des céramiques PZT disparaissent au delà d'une certaine température de Curie (de l'ordre de 150 à 400 °C). L'état ferroélectrique laisse alors la place à un comportement diélectrique linéaire de type paraélectrique.

Les céramiques PZT sont principalement exploitées dans le domaine des ultrasons. Elles concernent des applications aussi variées que le sonar, les transducteurs à usage médical (échographie), les allume-gaz et plus récemment les injecteurs de carburant (injection directe dans les moteurs diesel). Leur aptitude à la conversion d'énergie en fait naturellement aujourd'hui le matériau de référence pour les moteurs et actionneurs à effets piézoélectriques.

7.1.2 Propriétés piézoélectriques des céramiques PZT

Les propriétés piézoélectriques des milieux continus sont décrites par le couple d'*équations constitutives* (4.50). Ces relations tensorielles[(1)] expriment les deux effets réciproques du phénomène de piézoélectricité, à savoir la polarisation électrique d'un corps soumis à une contrainte mécanique (effet piézoélectrique *direct*) et sa déformation sous l'action d'un champ électrique extérieur (effet piézoélectrique *inverse*).

D'un point de vue cristallographique, les céramiques PZT sont assimilables aux cristaux de la classe « 6*mm* » du système hexagonal. Cela signifie que leur structure élémentaire admet un axe de symétrie d'ordre 6 et six plans de symétrie parallèles à l'axe principal [**43**]. Ces éléments de symétrie se répercutent directement sur la forme des tenseurs décrivant les propriétés électromécaniques du matériau à l'échelle macroscopique locale (cf. § 2.3.5). Ainsi, dans le cas des céramiques PZT, ces tenseurs sont représentés par les matrices rassemblées dans le tableau 7.1.

$$\left[s^E_{\lambda\mu}\right] = \begin{pmatrix} s^E_{11} & s^E_{12} & s^E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s^E_{12} & s^E_{11} & s^E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s^E_{13} & s^E_{13} & s^E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^E_{66} \end{pmatrix}$$ (souplesses à champ électrique constant)	$$\left[\epsilon^T_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \epsilon^T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^T_{33} \end{pmatrix}$$ (permittivités à contrainte constante)
$$\left[d_{i\lambda}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (constantes de charge piézoélectrique)	

Tableau 7.1 Forme particulière des matrices caractérisant les propriétés électromécaniques des céramiques PZT

À noter que, après l'étape de polarisation sous champ intense, le milieu ferroélectrique possède une polarisation macroscopique rémanente $\mathbf{P}_0$. Aussi, le champ $\mathbf{D}$ figurant dans les équations (4.50) doit être considéré comme la variation du

(1) Par *relations tensorielles*, on entend désigner ici la formulation indicielle qui permet de rendre compte de propriétés anisotropes. Ceci ne garantit en rien le caractère covariant des équations constitutives, au sens des lois tensorielles introduites au chapitre 2. La validité de ces lois de comportement n'est établie, en toute rigueur, que dans un référentiel de repos du milieu.

déplacement électrique ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$) autour du champ rémanent $\mathbf{P}_0$. D'autre part, la forme des matrices obtenues se réfère, par convention, à un système orthonormé $(O, x = x_1, y = x_2, z = x_3)$ dont l'axe Oz coïncide avec l'axe de polarisation orienté par le vecteur $\mathbf{P}_0$. Rappelons enfin que, en vertu de la notation condensée précédemment introduite pour les grandeurs mécaniques (voir tableau 2.1), les indices 1, 2, et 3 se rapportent aux déformations et contraintes de tensions parallèles aux axes Ox, Oy et Oz, tandis que les indices 4, 5 et 6 correspondent respectivement aux effets de cisaillement autour de ces mêmes axes.

7.1.3 Modes de couplage élémentaires

Comme on peut le constater dans le tableau 7.1, la matrice des constantes de charge est construite à partir des seuls éléments non nuls d_{33}, d_{31} $(= d_{32})$ et d_{15} $(= d_{24})$. Dès lors, le couplage électroélastique intervenant dans les céramiques piézoélectriques s'opère selon trois modes élémentaires respectivement dénommés modes *longitudinal* (ou mode « 33 »), *transversal* (mode « 31 ») et mode de *cisaillement* (mode « 15 »). Les équations constitutives associées à chacun de ces modes et les effets auxquels ils donnent lieu dans le cas d'un barreau parallélépipédique sont explicités dans le tableau 7.2.

Ainsi, un barreau polarisé suivant sa longueur et soumis à une différence de potentiel appliquée entre deux électrodes perpendiculaires à son axe de polarisation $Oz\,(= Ox_3)$ subit, par effet piézoélectrique inverse, une variation de longueur dans cette même direction. Naturellement, ceci suppose que le barreau soit libre de se déformer, ce qui est en particulier le cas pour un fonctionnement « à vide » ($T_3 = 0$). Selon une deuxième configuration, le barreau peut être polarisé suivant son épaisseur et soumis à un champ extérieur orienté dans cette même direction. On observe alors, sous l'effet du couplage transversal, une variation de longueur perpendiculairement à la direction de polarisation. Enfin, l'application d'un champ perpendiculaire à la direction de polarisation, par exemple suivant l'axe Ox, tend à faire tourner les dipôles élémentaires autour de l'axe Oy. La déformation qui en résulte définit ainsi le mode de cisaillement. Un raisonnement similaire peut être développé pour l'effet direct.

Il convient de noter que les couplages longitudinaux et transversaux interviennent de manière combinée dans le matériau. Ces modes ont été implicitement découplés dans le cas du barreau allongé en négligeant les déformations produites suivant les directions perpendiculaires à sa grande longueur. En revanche, s'agissant par exemple d'un cylindre court polarisé suivant sa hauteur, les couplages longitudinaux et transversaux devront à l'évidence être conjointement pris en compte.

À partir de ces trois formes d'interaction élémentaire, une grande variété de configurations peut être exploitée en jouant sur la géométrie de l'échantillon (plaque, tube, etc.) ainsi que sur son type de polarisation (axiale, en épaisseur, etc.). C'est à partir de ces cellules de conversion élémentaires, utilisées indépendamment ou de manière combinée, que se déclinent les différents types de transducteurs piézoélectriques à base de céramique PZT.

Modes élémentaires et équations associées	Exemple de base (déformation à vide ($T_\lambda = 0$) d'un barreau de forme allongée)
mode **longitudinal** $\begin{cases} S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \\ D_3 = d_{33} T_3 + \epsilon_{33}^T E_3 \end{cases}$	extension suivant Oz $(= Ox_3)$ $d_{33} > 0$: S_3 et E_3 de même signe
mode **transversal** $\begin{cases} S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3 \end{cases}$	extension suivant Ox $(= Ox_1)$ $d_{31} < 0$: S_1 et E_3 de signes opposés
mode de **cisaillement** $\begin{cases} S_5 = s_{44}^E T_5 + d_{15} E_1 \\ D_1 = d_{15} T_5 + \epsilon_{11}^T E_1 \end{cases}$	cisaillement autour de Oy $(= Ox_2)$ $d_{15} > 0$: S_5 et E_1 de même signe (les électrodes sont représentées en grisé)

Tableau 7.2 Modes de couplage électromécanique élémentaires dans les céramiques PZT

7.2 CONVERSION D'ÉNERGIE PAR COUPLAGE ÉLECTROÉLASTIQUE

7.2.1 Cycle de conversion élémentaire

De par son caractère divalent (cf. § 4.1.2), le phénomène de piézoélectricité constitue un moyen direct et réversible pour transformer l'énergie électrostatique en énergie élastique. Afin de mieux comprendre les conditions de cette transformation, considérons à titre d'exemple le processus de conversion « électromécanique » étudié dans le tableau 7.3. Sans restreindre la généralité, l'exemple choisi concerne un transducteur piézoélectrique travaillant en mode transversal. La transformation idéale qu'il subit

sera assimilée, d'un point de vue thermodynamique, à un processus quasistatique isotherme. Au cours de cette transformation, l'élément piézoélectrique réalise un transfert d'énergie entre, d'une part, une source de tension idéale imposant un champ électrique suivant l'axe de polarisation (Oz), et, d'autre part une charge mécanique ramenant une contrainte uniaxiale de direction perpendiculaire (Ox). Les grandeurs électriques (déplacement et champ électriques) et mécaniques (déformation relative et contrainte) sont supposées uniformes dans tout le volume du matériau.

Durant la première étape du cycle (OA), la céramique, mécaniquement libre ($T_1 = 0$), subit une contraction suivant l'axe Ox sous l'effet du champ électrique appliqué. Au cours de cette étape, le transducteur emmagasine une énergie W correspondant au travail fourni par la source électrique.

Au cours de la deuxième étape (AB), le champ électrique est réduit jusqu'à sa valeur initiale ($E_3(B) = E_3(O) = 0$), tandis que l'état de déformation du corps est maintenu constant (élément momentanément encastré). Une partie de l'énergie reçue au cours de l'étape précédente est ainsi restituée à la source électrique sous la forme du travail W_i (aire du triangle AMB dans le plan $D_3(E_3)$). Le reste est progressivement stocké sous forme d'énergie élastique dans le milieu déformable. C'est donc au cours de cette étape que s'opère véritablement le processus de conversion.

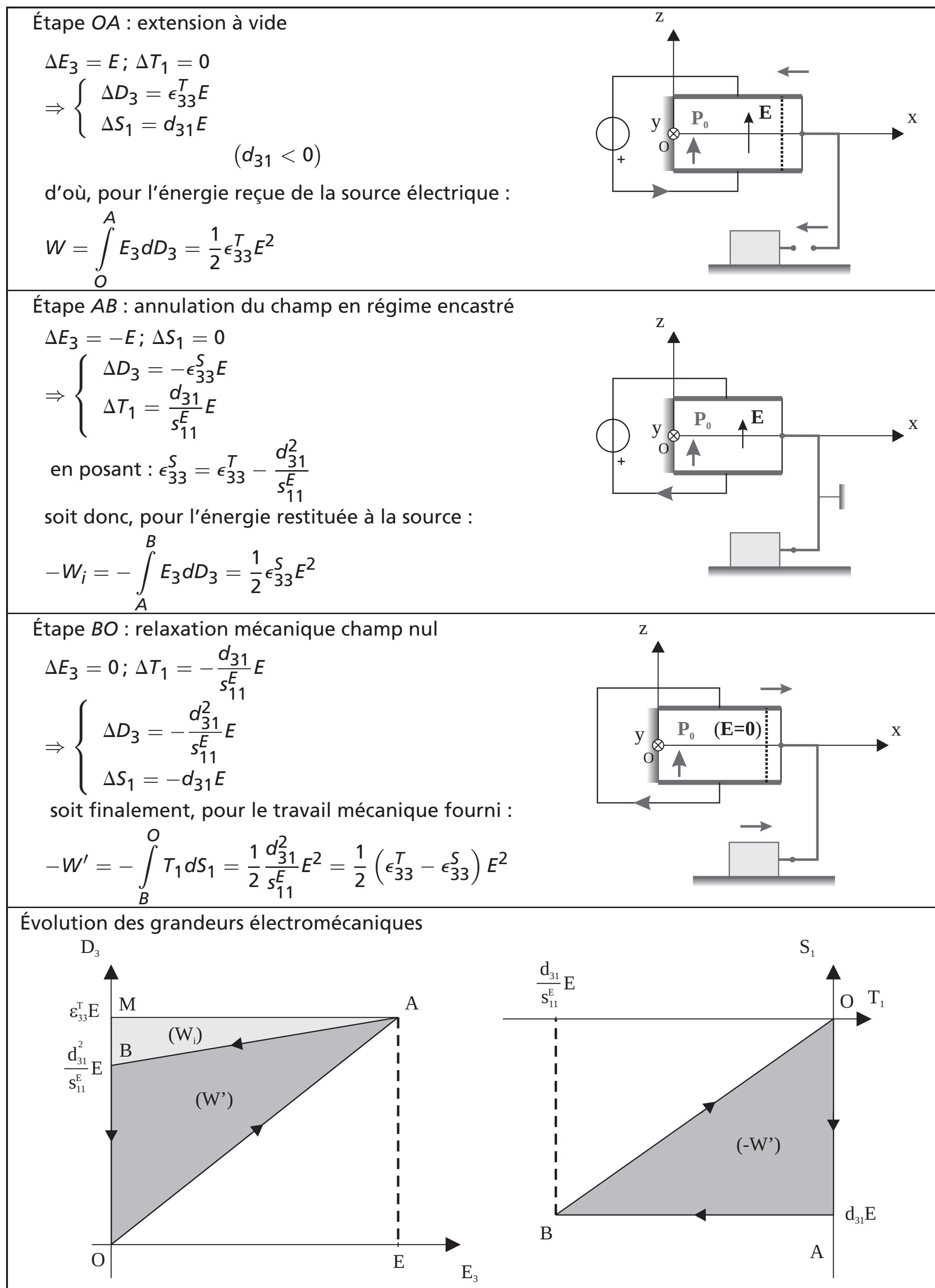
Enfin, durant la phase de relaxation (BO), le transducteur restitue l'énergie stockée sous la forme du travail mécanique W' absorbé par la charge mécanique[1].

La conversion s'effectuant sans pertes, le rendement caractérisant le processus quasistatique est de toute évidence unitaire. En revanche, on constate que l'énergie initialement apportée au transducteur (W) n'est pas intégralement convertie au cours du cycle $\left(W' < W\right)$. Remarquons à ce propos que le travail W' est d'autant plus élevé qu'il existe un contraste marqué entre les permittivités à contrainte constante $\left(\epsilon_{33}^{T}\right)$ et à déformation constante $\left(\epsilon_{33}^{S}\right)$. Ces permittivités sont respectivement mises en jeu durant les étapes OA et OB. Des conclusions analogues pourraient être formulées en ce qui concerne les constantes de souplesse (à champ ou à déplacement constants). Pour s'en convaincre, on pourra notamment appliquer les raisonnements précédents au cas d'un cycle de conversion « mécano-électrique » au cours duquel se succèdent des conditions d'exploitation en court-circuit ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$) et en circuit ouvert ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$).

7.2.2 Efficacité et rendement de conversion

Dans l'exemple précédent, l'aptitude du transducteur à convertir l'énergie peut être formellement appréhendée au travers du rapport de l'énergie transformée W' à l'énergie initialement reçue W. En prenant la racine carrée de ce rapport, on définit ainsi le *coefficient de couplage électromécanique* qui constitue une mesure directe de l'*efficacité* de conversion. Ce coefficient dépend généralement des propriétés

(1) Cette énergie sera éventuellement dissipée dans la charge sous l'action d'un frottement visqueux, par exemple.



Étape *OA* : extension à vide

$$\Delta E_3 = E\,;\ \Delta T_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta D_3 = \epsilon_{33}^T E \\ \Delta S_1 = d_{31} E \end{cases} \qquad (d_{31} < 0)$$

d'où, pour l'énergie reçue de la source électrique :

$$W = \int_O^A E_3 dD_3 = \frac{1}{2}\epsilon_{33}^T E^2$$

Étape *AB* : annulation du champ en régime encastré

$$\Delta E_3 = -E\,;\ \Delta S_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta D_3 = -\epsilon_{33}^S E \\ \Delta T_1 = \dfrac{d_{31}}{s_{11}^E} E \end{cases}$$

en posant : $\epsilon_{33}^S = \epsilon_{33}^T - \dfrac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$

soit donc, pour l'énergie restituée à la source :

$$-W_i = -\int_A^B E_3 dD_3 = \frac{1}{2}\epsilon_{33}^S E^2$$

Étape *BO* : relaxation mécanique champ nul

$$\Delta E_3 = 0\,;\ \Delta T_1 = -\frac{d_{31}}{s_{11}^E} E$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta D_3 = -\dfrac{d_{31}^2}{s_{11}^E} E \\ \Delta S_1 = -d_{31} E \end{cases}$$

soit finalement, pour le travail mécanique fourni :

$$-W' = -\int_B^O T_1 dS_1 = \frac{1}{2}\frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}E^2 = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{33}^T - \epsilon_{33}^S\right)E^2$$

Évolution des grandeurs électromécaniques

Tableau 7.3 Exemple de cycle de conversion en régime quasistatique (cas du mode transversal)

physiques et géométriques du transducteur, ainsi que de la façon dont il est mis en oeuvre. Néanmoins, pour un cycle de conversion idéal tel que celui qui a été détaillé dans le tableau 7.3, le rapport des énergies mises en jeu dépend uniquement des caractéristiques physiques du matériau. De ce fait, la constante obtenue sera qualifiée de coefficient de couplage *intrinsèque*. Pour le mode transversal, cette constante s'exprime par :

$$k_{31} = \sqrt{\frac{W'}{W}} = \sqrt{\frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}} \tag{7.1}$$

Les formules donnant les coefficients $k_{i\lambda}$ relatifs aux modes « 31 » et « 15 » s'obtiennent immédiatement en substituant dans (7.1) les indices correspondants. Remarquons que ces coefficients se déduisent également du potentiel (4.49) gouvernant l'équilibre électromécanique du système. En divisant le terme d'interaction par la racine carrée du produit des termes propres, on retrouve (à un facteur 2 près) une expression strictement analogue à (7.1) pour chacun des modes considérés.

Les conditions d'exploitation réelles du transducteur amènent à caractériser son efficacité au moyen d'un coefficient de couplage dit *effectif*. Ce dernier rend compte de la non-homogénéité des grandeurs électromécaniques au sein du matériau. Les constantes de couplage intrinsèques, déduites d'une situation idéale pour laquelle les champs sont uniformes, en indiquent par conséquent une limite supérieure.

Pour les céramiques classiquement utilisées dans les piézoactionneurs, les constantes $k_{i\lambda}$ s'échelonnent typiquement entre $0,3$ (mode transversal) et $0,7$ (mode longitudinal). Ainsi, dans les configurations les plus pénalisantes, on pourra espérer au mieux convertir 10 % de l'énergie totale échangée à chaque cycle. En régime variable, ceci se répercutera directement sur le *facteur de puissance* qui rend compte, au plan électrique, de la qualité du transfert d'énergie réalisé entre la source et le transducteur.

Un second critère également très précieux pour caractériser la qualité de ce transfert correspond au *rendement de conversion*. Ce facteur exprime le rapport entre la puissance « utile » disponible en sortie du convertisseur et la puissance totale qu'il absorbe, incluant la puissance dissipée au cours de la transformation. L'excitation à haute fréquence des céramiques piézoélectriques soulève en effet la question des pertes engendrées dans le matériau électroactif. Sans entrer dans les détails d'un sujet dont la théorie n'est à ce jour que très partiellement ébauchée, retenons simplement que la puissance dissipée est classiquement décomposée en deux contributions principales :

➤ Les *pertes diélectriques* regroupent les effets dus à la conductivité parasite du milieu et à l'hystérésis (dans le plan champ-déplacement) qui caractérise son comportement ferroélectrique.

  En première approximation, la puissance ainsi dissipée (par unité de volume) pourra être estimée au moyen d'une loi du type :

$$P_d = \frac{1}{2}\omega E^2 \epsilon \tan\delta \tag{7.2}$$

où ω, E, ϵ et tan δ désignent respectivement la pulsation et l'amplitude des variations du champ (en régime harmonique), la permittivité absolue du milieu (dans la direction du champ appliqué) et enfin la tangente de l'angle de pertes.

➤ Les *pertes mécaniques* tiennent aux frottements internes (mouvement des parois délimitant les domaines élémentaires du milieu) sous l'action de la déformation.

La puissance volumique correspondante sera approchée, d'un point de vue comportemental, grâce à une relation de la forme :

$$P_m = \frac{1}{2}\rho_m \dot{S}^2 \tag{7.3}$$

où ρ_m représente la résistivité mécanique équivalente du milieu soumis à une déformation relative de vitesse $\dot{S}$.

À titre d'exemple, une céramique « dure » de composition standard, excitée à 40 kHz sous un champ électrique de $0,3$ MV.m^{-1} d'amplitude, génère des pertes spécifiques d'origine diélectrique de l'ordre de $0,5$ MW.m^{-3}. Pour la même céramique soumise à une déformation alternative de vitesse égale à 150 s^{-1}, les pertes mécaniques par unité de volume s'élèvent à environ 3 MW.m^{-3} [**72**]. Si ces valeurs semblent élevées, elles doivent néanmoins être ramenées aux puissances spécifiques théoriques (supérieures à 50 MW.m^{-3}) qui caractérisent les processus de conversion à base de céramiques PZT (figure 4.15).

7.2.3 Transducteurs piézoélectriques

Sur le plan quantitatif, les déformations engendrées en régime quasistatique par les matériaux piézoélectriques demeurent par principe relativement faibles. Ainsi, pour une céramique d'usage courant caractérisée par une constante de charge (en mode longitudinal) de l'ordre de 500 pC.N^{-1}, on obtient sous un champ limite de 2 MV.m^{-1} une déformation à vide ($T_3 = 0$) de 1 000 ppm (parties par million) en valeur relative. Ceci correspond à un allongement de 10 µm pour un barreau de 10 mm de long. Quant aux forces disponibles, elles correspondent à des contraintes considérables du fait même de la raideur mécanique élevée de la céramique. En régime encastré, ces contraintes atteignent couramment des valeurs de l'ordre de 40 MPa, soit un effort résultant de plus 3 000 N pour un barreau de 10 mm de diamètre. Notons cependant que, pour soumettre le barreau considéré au champ maximal requis, il s'agit a priori d'appliquer entre ses extrémités une différence de potentiel de 20 kV !

Afin d'obtenir le même déplacement sous une tension plus faible, on peut avoir l'idée de constituer le transducteur à partir d'un empilement de pastilles élémentaires connectées électriquement en parrallèle. Si l'on est capable de réaliser cet assemblage à partir d'éléments d'épaisseur micrométrique, il devient alors possible d'exploiter le matériau dans des conditions nominales sous des niveaux de tension inférieurs à 100 V. Tel est le principe de la technologie des *actionneurs multicouches* illustrée sur la figure 7.1.

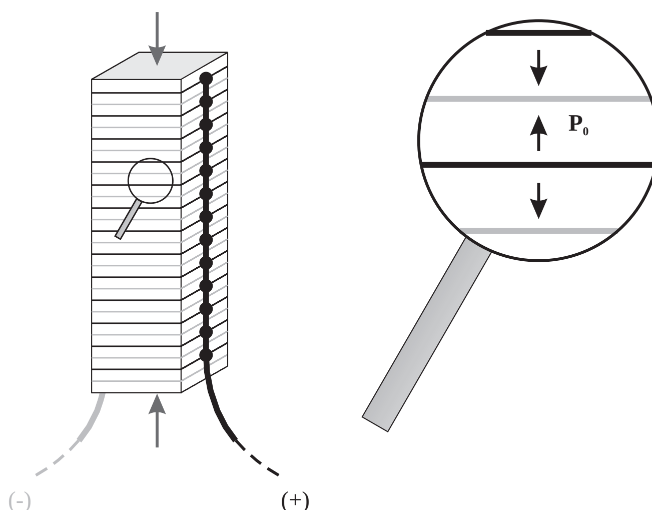


Figure 7.1 Structure schématique d'un transducteur piézoélectrique « multicouches »

Afin de transformer les déplacements micrométriques produits au niveau de la céramique en mouvements utiles d'ordre millimétrique, on aura également très souvent recours à un procédé d'*amplification mécanique*. Ce principe se justifie d'autant mieux que, comme nous l'avons vu, les efforts disponibles sont élevés. Ainsi, à l'aide d'un mécanisme à « bras de levier » ou bien grâce à une cinématique de déformation appropriée (effets de type « bilame » par exemple), on pourra adapter, dans une certaine mesure, les possibilités du matériau à la fonction électromécanique requise. Une voie également très prometteuse concerne l'exploitation de structures composites obtenues en noyant des fibres piézoélectriques au sein d'une matrice polymère.

Mais c'est le plus souvent en tirant parti d'effets de résonance que l'on parviendra à améliorer sensiblement les conditions du transfert d'énergie réalisé par le transducteur. Ce procédé largement utilisé en piézoélectricité fait l'objet du paragraphe suivant.

7.3 COUPLAGE ÉLECTROMÉCANIQUE EN RÉGIME RÉSONNANT

7.3.1 Principes généraux

On sait que, pour certaines fréquences d'excitation, la réponse d'une structure mécanique déformable sollicitée à faible niveau peut produire des déplacements de grande amplitude. Ce phénomène de *résonance mécanique* constitue un moyen tout naturellement adapté à l'amplification des vibrations engendrées dans les transducteurs piézoélectriques [**73**].

La voie la plus directe pour exploiter de tels effets consiste à exciter le corps piézoélectrique au voisinage d'une des *fréquences propres* qui caractérisent son comportement dynamique intrinsèque. Toutefois, dans la plupart des transducteurs, c'est en associant la céramique électroactive à un milieu passif possédant de bonnes caractéristiques élastodynamiques que l'on constituera généralement la structure vibrante. Grâce à l'emploi de *résonateurs* de formes diverses, le *mode propre* (en extension, flexion, torsion, etc.) selon lequel on souhaite forcer la vibration devient ainsi plus facile à sélectionner. De même, les fréquences ou amplitudes de résonance sont plus aisément adaptables. D'un point de vue énergétique, il s'agit par ce moyen de « concentrer » l'énergie de déformation sur un mode particulier, en vue d'en améliorer le couplage électromécanique global. En outre, dans le cas des piézomoteurs, c'est généralement le résonateur lui-même qui communiquera par contact le mouvement d'entraînement à la partie mobile.

Si cet organe d'adaptation se révèle ainsi très utile sur le plan fonctionnel, il introduit cependant des difficultés d'ordre pratique inhérentes à son assemblage avec l'élément piézoélectrique. Une première solution consiste à réaliser cet assemblage au moyen d'une simple vis. Telle est la configuration classiquement adoptée dans le *transducteur de Langevin* par exemple. Ce dernier est constitué d'un résonateur cylindrique double enserrant un empilement de disques de céramique excités en mode longitudinal. Outre la fonction d'assemblage, la vis qui traverse le transducteur de part en part permet d'appliquer une précontrainte au niveau des céramiques. Cette précontrainte améliore les performances électromécaniques globales du dispositif ainsi que sa tenue mécanique. Une autre voie également très utilisée consiste à coller la céramique d'excitation contre le résonnateur. Ce procédé est notamment employé dans les structures de type *bimorphe*. En disposant une plaque piézoélectrique polarisée en épaisseur contre un résonnateur en forme de lame ou d'anneau, on induit, par couplage transversal, une déformation en flexion de l'assemblage. Cette configuration est directement utilisée dans les moteurs à onde progressive (cf. § 7.5.2).

Compte tenu de la diversité des géométries et des modes de couplage électroélastiques exploitables, la théorie complète des transducteurs résonnants se décline selon un grand nombre de structures élémentaires. L'élaboration de modèles physiques prédictifs constitue à l'évidence une étape incontournable de cette théorie. Ses retombées concernent tant la conception du transducteur (dimensionnement optimal) que son contrôle (définition des stratégies d'alimentation et de commande appropriées). Cependant, la structure généralement composite du transducteur soulève de sérieuses difficultés de modélisation. Aussi, comme pour les convertisseurs électromagnétiques, le recours à la simulation numérique s'impose dès lors que l'on cherche à caractériser finement une structure de conversion donnée. L'approche analytique n'en demeure pas moins indispensable pour élaborer une représentation « au premier ordre ». Cette classe de modèles est en effet très précieuse pour décrire et analyser le fonctionnement global du transducteur ou bien pour procéder à son prédimensionnement. L'exemple traité ci-après permet d'en mesurer toute la portée.

7.3.2 Cas d'un transducteur à couplage transversal

Afin de dégager les propriétés fondamentales des transducteurs piézoélectriques fonctionnant à la résonance, reprenons l'exemple de l'élément à couplage transversal étudié en régime quasistatique au paragraphe 7.2.1. À partir des relations constitutives locales du milieu et des conditions aux frontières imposées par les corps extérieurs, on se propose de déterminer les équations macroscopiques qui caractérisent le transducteur en régime variable.

Face à ce problème électroélastique couplé, le système d'équations dynamiques qu'il s'agit a priori de résoudre combine les équations du champ (cf. tableau 2.2) aux équations (2.43) de l'élastodynamique. Or, à l'exception de quelques configurations particulièrement « simples », voire triviales, ce système différentiel n'admet pas en général de solution analytique exacte. Aussi, il faudra se contenter dans la plupart des cas d'une solution approchée. À cette fin, plutôt que de chercher à résoudre une version simplifiée du jeu d'équations initial, le problème peut aussi être avantageusement formulé en termes de lagrangien, conformément à la méthodologie préconisée au chapitre 2. Moyennant quelques hypothèses sur la distribution des champs (degrés de liberté locaux), il s'agit dans ce cas de construire une fonction de Lagrange exprimée à partir des coordonnées et vitesses généralisées macroscopiques du système. Le principe de moindre action portant sur une fonctionnelle de nature énergétique, les erreurs commises sur les grandeurs globales sont du second ordre par rapport aux approximations effectuées sur les champs. Un second avantage de la méthode tient à l'obtention systématisée des équations du mouvement sous la forme des équations de Lagrange (2.34).

S'agissant de l'élément à couplage transversal schématisé sur la figure 7.2, on suppose tout d'abord que le champ électrique $\mathbf{E}$ est nul hors du volume (V_0) occupé par l'élément piézoélectrique[(1)] et que sa distribution est uniforme dans tout le volume du matériau. Les électrodes disposées sur les faces supérieures et inférieures du transducteur imposent des équipotentielles parallèles au plan (xOy), si bien que le champ est dirigé selon Oz (axe de polarisation).

D'autre part, face aux multiples configurations vibratoires possibles, on s'intéresse plus particulièrement au cas où la déformation s'établit selon une onde plane stationnaire caractérisée par un seul noeud (l'élément est encastrée en $x = 0$) et un seul ventre situé au niveau de la face libre (plan $x = a$). En d'autres termes, la longueur d'onde λ_v de la vibration est telle que $a = \lambda_v/4$ (résonance dite en « quart de longueur d'onde »). Dans ces conditions, on recherchera pour le champ de déplacement $u_x(x, t)$ une solution de la forme :

$$u_x(x, t) = u_\omega(t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_v} x\right) \tag{7.4}$$

(1) Cette hypothèse est justifiée par la permittivité élevée de la céramique (typiquement 1 000 fois la permittivité du vide) comparée à celle du milieu environnant.

où u_ω désigne le déplacement harmonique, de pulsation ω, que subit la face libre (suivant Ox).

Ce champ de déplacement correspond ainsi à une déformation dont la seule composante non nulle est donnée par :

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{2\pi}{\lambda_v} u_\omega \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_v} x\right) \tag{7.5}$$

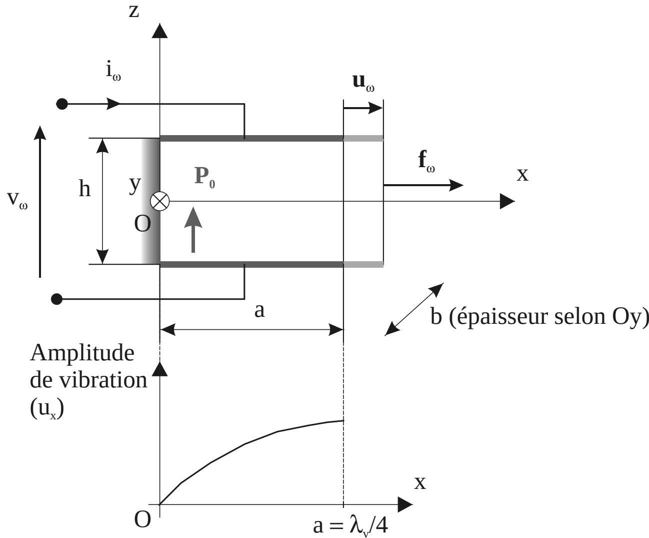


Figure 7.2 Transducteur à couplage transversal excité à la résonance selon un mode en « quart de longueur d'onde »

En vertu de l'hypothèse d'uniformité du champ électrique, et convenant de négliger tout phénomène de couplage avec le champ magnétique (hypothèses de l'électrostatique), l'équation (2.8) reliant le champ aux potentiels se réduit à :

$$E_3 = -\frac{v_\omega}{h} \tag{7.6}$$

où v_ω désigne la tension alternative développée en régime harmonique entre les électrodes du transducteur, distantes de la hauteur h.

Dès lors, les variables indépendantes naturellement privilégiées au niveau global correspondent au déplacement u_ω et à la tension v_ω. Ces grandeurs harmoniques sont respectivement conjuguées de l'intensité f_ω de la force qu'exerce le milieu extérieur sur le transducteur et de la charge q_{c_ω} portée par ses électrodes. La dérivée par rapport au temps de cette charge détermine l'intensité i_ω du courant circulant entre les électrodes.

Compte tenu de ce paramétrage, il paraît donc plus commode de préférer le couple de variables indépendantes (S, E) au couple (T, E) initialement retenu pour exprimer les équations de la piézoélectricité. Ce choix revient à adopter comme potentiel

thermodynamique une « enthalpie libre électrique » définie par (cf. section 4.4) :

$$G_e(S_1, E_3) = \frac{1}{2}c_{11}^E S_1^2 - e_{31} S_1 E_3 - \frac{1}{2}\epsilon_{33}^S E_3^2 \tag{7.7}$$

La correspondance des coefficients c_{11}^E, e_{31} et ϵ_{33}^S avec les constantes caractéristiques du mode transversal exprimé en variables (T, E) s'obtient immédiatement en inversant le jeu d'équations constitutives donné dans le tableau 7.2(1). Il vient ainsi :

$$c_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E} \ ; \ e_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \ ; \ \epsilon_{33}^S = \epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \tag{7.8}$$

7.3.3 Équations de fonctionnement en régime harmonique

En vertu du principe énoncé au paragraphe 2.3.1, tout système électromécanique est caractérisé par un lagrangien à partir duquel les équations du mouvement peuvent être systématiquement établies. Pour un système conservatif, la fonction de Lagrange n'est autre que la différence des termes d'énergies cinétique et potentielle généralisées. Ainsi, dans le cas du transducteur à couplage transversal caractérisé par le potentiel volumique (7.7), cette fonction s'identifie à l'intégrale :

$$L_p = \frac{1}{2}\int_{(V_0)} \left(\rho_{m_0}\dot{u}_1^2 - c_{11}^E S_1^2 + 2e_{31} S_1 E_3 + \epsilon_{33}^S E_3^2\right) dv \tag{7.9}$$

où ρ_{m_0} désigne la masse volumique de la céramique.

En substituant dans (7.9) l'expression des grandeurs locales en fonction des variables globales u_ω et v_ω (relations (7.4) à (7.6)), il vient, après intégration des différents termes sur un volume d'élément $dv = bhdx$:

$$L_p(u_\omega, \dot{u}_\omega, v_\omega) = \frac{1}{2}M_v \dot{u}_\omega^2 - \frac{1}{2}\kappa^E u_\omega^2 + \eta u_\omega v_\omega + \frac{1}{2}C^S v_\omega^2 \tag{7.10}$$

La définition des constantes globales M_v, κ^E, η, et C^S en fonction des caractéristiques physiques du transducteur est explicitée dans le tableau 7.4.

Le lagrangien L_p décrit la dynamique propre de l'élément piézoélectrique, indépendamment des sources électriques et mécaniques avec lesquelles il interagit. La prise en compte explicite de ces corps extérieurs requiert l'introduction de potentiels externes construits comme le produit des forces données par les coordonnées généralisées qui leur sont conjuguées (voir section 3.5). Ainsi, la fonction de Lagrange associée au système électromécanique complet s'écrira :

$$L(u_\omega, \dot{u}_\omega, v_\omega, t) = \frac{1}{2}M_v \dot{u}_\omega^2 - \frac{1}{2}\kappa^E u_\omega^2 + \eta u_\omega v_\omega + \frac{1}{2}C^S v_\omega^2 + f_\omega(t)\, u_\omega - q_{c_\omega}(t)\, v_\omega \tag{7.11}$$

(1) Ceci suppose implicitement que l'effet des autres modes de couplage est négligé. Dans le cas contraire, il conviendra d'inverser le système d'équations (4.50) dans toute sa généralité.

Constante (unité)	Expression	Signification physique
M_v (Kg)	$M_v = \frac{1}{2}\rho_{m_0} abh$	masse vibrante équivalente
κ^E $\left(\text{N.m}^{-1}\right)$	$\kappa^E = \frac{c_{11}^E \pi^2 bh}{8a}$	raideur à champ électrique constant
C^S (F)	$C^S = \frac{\epsilon_{33}^S ab}{h}$	capacité de l'élément encastré
η $\left(\text{N.V}^{-1}\right)$	$\eta = -e_{31} b \quad (e_{31} < 0)$	rapport de transformation électromécanique
(les dimensions du transducteur sont définies à la figure 7.2)		

Tableau 7.4 Constantes électromécaniques globales du transducteur à couplage transversal (résonance en quart de longueur d'onde)

Dans cette formulation, il convient de noter que la tension harmonique v_ω joue le rôle d'une vitesse généralisée. Cette situation résulte directement du choix des variables indépendantes figurant dans le potentiel (7.7). L'énergie électrostatique étant assimilée à une énergie cinétique, conformément à une convention du type « magnétostatique » (cf. tableau 3.2), elle est comptée positivement dans l'expression du lagrangien, alors que l'énergie élastique est affectée d'un signe négatif. Ceci justifie de même la différence de signe des potentiels d'origine externe.

La transcription des équations générales (2.34) en termes du lagrangien (7.11) fournit immédiatement les équations propres aux degrés de liberté mécanique et électrique du système. Le fonctionnement du transducteur en régime harmonique est donc finalement régi par le système différentiel :

$$\begin{cases} M_v \ddot{u}_\omega + \kappa^E u_\omega = \eta v_\omega + f_\omega \\ C^S \dot{v}_\omega + \eta \dot{u}_\omega = i_\omega \end{cases} \tag{7.12}$$

L'équation mécanique, du second ordre, rend compte d'un comportement résonnant dont la pulsation caractéristique s'exprime par :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\kappa^E}{M_v}} = \frac{2\pi}{\lambda_v}\sqrt{\frac{c_{11}^E}{\rho_{m_0}}} \tag{7.13}$$

Quant à l'équation électrique, elle montre que l'intensité du courant absorbé par le transducteur est la somme de deux contributions. La première, d'origine purement diélectrique, correspond à un courant « capacitif » d'intensité $C^S \dot{v}_\omega$. La seconde résulte directement du couplage piézoélectrique sous l'effet duquel apparaît un courant proportionnel à la vitesse vibratoire $\dot{u}_\omega$.

7.3.4 Schéma électrique équivalent

Afin de faciliter les raisonnements, il est d'usage de représenter le fonctionnement des transducteurs piézoélectriques sous la forme de schémas électriques équivalents. Dans le cas de l'élément à couplage transversal, les équations (7.12) permettent ainsi d'établir le schéma de la figure 7.3.

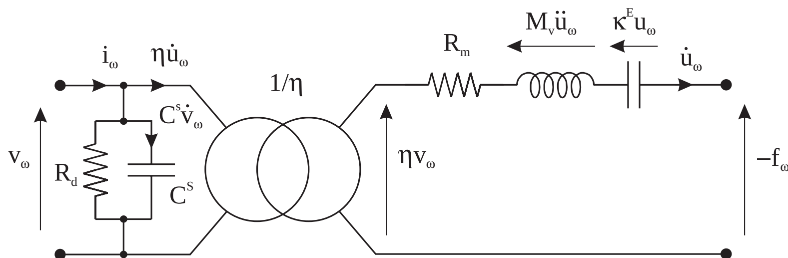


Figure 7.3 Schéma électrique équivalent du transducteur à couplage transversal fonctionnant au voisinage de la résonance

La représentation du couplage électromécanique fait appel à un transformateur idéal dont le rapport de transformation (η) établit une correspondance entre les variables électriques (tension v_ω, courant i_ω) et mécaniques (force f_ω, vitesse vibratoire $\dot{u}_\omega$).

Au primaire du transformateur, on trouve une *branche statique* qui résume les propriétés diélectriques du milieu. À vitesse vibratoire nulle, l'impédance électrique du transducteur est directement déterminée par les élements de cette branche. Elle est constituée de la capacité C^S (définie à déformation constante) à laquelle on adjoindra généralement une résistance R_d pour tenir compte de l'angle de perte (cf. § 7.2.2).

La branche secondaire, ou *branche motionnelle*, a trait aux propriétés élastodynamiques du milieu. Le courant circulant au secondaire étant analogue à une vitesse, la masse vibrante M_v équivaut à une inductance, tandis que la raideur de l'élément intervient sous la forme d'une capacité (de valeur $1/\kappa^E$). Les phénomènes dissipatifs d'origine mécanique se traduisent par une résistance équivalente R_m placée en série(1).

Grâce à une telle représentation, on pourra facilement étudier le comportement du transducteur soumis à différents types de sollicitations. Il suffira pour cela d'analyser les propriétés du schéma électrique global incluant les circuits électriques (ou électroniques) reliés au transducteur ainsi que les schémas équivalents représentatifs du système mécanique avec lequel il interagit. À ce propos, on notera qu'un secondaire

(1) Qu'ils soient d'origine mécanique ou diélectrique, les phénomènes dissipatifs peuvent être directement pris en compte dans le lagrangien, pourvu que les forces de dissipation s'expriment en raison des vitesses généralisées. La puissance dissipée intervient alors sous la forme d'une fonction de Rayleigh, conformément à la méthode décrite à la section 3.5.

en circuit ouvert traduit un encastrement de la face libre ($\dot{u}_\omega = 0$). À l'inverse, un fonctionnement à vide d'un point de vue mécanique imposera un court-circuit en sortie du circuit motionnel ($f_\omega = 0$).

Soulignons enfin que la validité d'un schéma à quatre terminaisons tel que celui de la figure 7.3 n'est assurée qu'au voisinage immédiat d'un mode de résonance donné. La représentation de la réponse du transducteur sur une bande de fréquence plus large nécessite d'inclure dans le transformateur autant de circuits secondaires que de modes propres susceptibles d'être excités. Par ailleurs, lorsque les deux faces mécaniquement actives de l'élément vibrent simultanément, on devra recourir à un schéma plus général comportant six terminaisons (schémas de Mason) [**43**].

7.4 ENTRAÎNEMENT PAR MOUVEMENT VIBRATOIRE

L'exploitation de l'effet piézoélectrique inverse, en régime quasi-statique ou résonant, constitue un processus relativement direct pour créer le mouvement à partir d'une source électrique. Cependant, ce mouvement demeure le fruit d'une déformation. Aussi, comme nous avons pu le voir, l'amplitude des déplacements utiles se limite en pratique à quelques dizaines de micromètres pour un transducteur de taille centimétrique. En excitant la déformation à fréquence relativement élevée (plusieurs dizaines de kHz), on peut néanmoins disposer d'un champ de vitesse vibratoire d'intensité tout à fait significative (de l'ordre de $0,1\ \text{m.s}^{-1}$ en régime résonant). Par conséquent, en vue d'accéder aux fonctionnalités d'un véritable moteur, il s'agit de convertir la vibration primaire en un mouvement uniforme de rotation ou de translation. Ce processus de « redressement » du champ de vitesse alternatif repose sur une exploitation judicieuse des actions de contact mises en jeu à l'interface séparant les parties fixe et mobile du piézomoteur.

Si l'on convient de se limiter ici aux concepts les plus classiques, on peut distinguer deux principaux types d'effets. Le premier résulte de la composition de deux déplacements orthogonaux. Le second tire profit des déplacements particulaires induits par la propagation d'une onde de flexion.

7.4.1 Composition de déformations

La mise en jeu d'un mouvement vibratoire doté d'un pouvoir d'entraînement unidirectionnel résulte d'une manière générale de conditions de contact *cycliques*. Ainsi, la surface active affronte périodiquement l'élément entraîné. La vitesse instantanée des points matériels constituant cette surface est alors communiquée par frottement à la partie mobile. Le contact est ensuite débrayé pour permettre la rétraction de l'élément vibrant, avant que le cycle ne se répète.

Afin que les forces motrices puissent exister, un effort d'appui normal à l'interface doit nécessairement être exercé entre les pièces en contact. Dans le cas d'un appui statique (obtenu le plus souvent par compression d'un élément élastique), le

débrayage du contact est garanti par l'inertie de l'élément entraîné (à l'échelle du cycle à haute fréquence). On peut aussi jouer sur une assymétrie de contact visant à réduire les efforts résiduels lors de la rétraction [**72**].

Comme l'illustre la figure 7.4, la voie la plus directe pour obtenir ce contact cyclique consiste à *composer* deux déformations d'axes perpendiculaires. Le premier mouvement (selon Ox) détermine la vitesse d'entraînement de la partie mobile tandis que sa mise en contact avec la surface vibrante est contrôlée par un déplacement d'axe perpendiculaire (selon Oy).

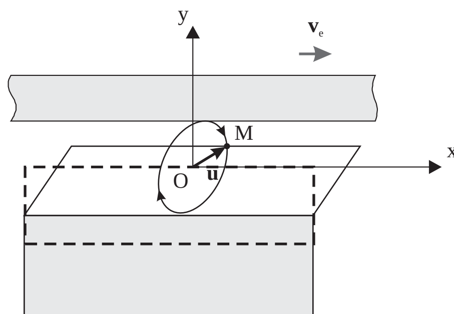


Figure 7.4 Principe de l'entraînement par composition de déformations

Une situation usuelle correspond au cas où les mouvements composés sont harmoniques, du fait par exemple de l'excitation du transducteur en régime résonnant. Supposons dans ces conditions que les points matériels de la surface vibrante subissent un déplacement **u** tel que :

$$\begin{cases} u_x = U_x \sin(\omega t) \\ u_y = U_y \sin(\omega t + \beta) \end{cases} \tag{7.14}$$

Si le déphasage β est non nul, le mouvement vibratoire correspond à un *cycle elliptique*. En négligeant les effets de glissement, la vitesse d'entraînement théorique v_e communiquée à l'élément mobile est alors donnée par :

$$v_e = \omega U_x \sin\beta \tag{7.15}$$

Cette vitesse est maximale pour des déplacements orthogonaux excités en quadrature de phase. Quant au sens de la translation, il est directement déterminé par le signe du déphasage β. Ainsi, grâce à un contrôle électrique approprié des transducteurs générant les déplacements u_x et u_y, les paramètres de réglage figurant au second membre de l'équation (7.15) pourront être facilement ajustés.

Soulignons cependant que la détermination précise de la vitesse effectivement communiquée à l'élément mobile constitue en soi un problème difficile. En effet, la

représentation réaliste des conditions de contact exige de tenir compte des déformations locales, du glissement partiel ainsi que des éventuels phénomènes de transfert mis en jeu à l'interface. On doit formuler les mêmes remarques quant à la détermination des efforts transmis. À ce propos, les lois de Coulomb sur le frottement solide prévoient une force motrice proportionnelle à l'effort normal exercé entre les deux corps. Le facteur de proportionnalité, ou coefficient de frottement, caractérise l'interface au plan tribologique. Si cette loi linéaire est assez bien vérifiée dans le cas de structures opérant en régime quasi-statique (telles que l'actionneur à pince décrit au paragraphe 7.5.1), elle ne correspond qu'à une approximation très grossière dans le cas de contacts excités à fréquences ultrasonores. Cette question fondamentale se situe au coeur des préoccupations visant à l'amélioration et à l'optimisation des performances électromécaniques des piézomoteurs [**74**].

7.4.2 Déformation glissante

Le procédé fondé sur la composition de déplacements d'axes concourants implique a priori un contact intermittent entre les pièces fixes et mobiles de l'actionneur. Il existe pourtant une solution cinématique permettant d'obtenir le mouvement cyclique recherché tout en bénéficiant de conditions de contact *continues*. Ce procédé s'inspire directement de l'effet utilisé dans les réducteurs de vitesse de type « harmonic drive ». Dans ce système, une jante à denture extérieure (constituant la roue menante) est déformée de manière à coopérer avec une roue cylindrique à denture intérieure de plus fort diamètre (roue menée). La mise en rotation de la déformée, grâce à un moyeu de section elliptique, engendre un mouvement relatif des deux roues. Le rapport de réduction est d'autant plus élevé que la différence des nombres de dents est faible.

Ce principe peut être facilement transposé au cas d'un entraînement linéaire par effet de contact, comme le montre la figure 7.5. Le glissement d'une déformation de flexion le long d'une lame élastique induit à sa surface un champ de vitesse capable de communiquer un mouvement par frottement. L'entraînement s'effectue en sens inverse du sens de propagation de l'onde de déformation. Pour le montrer, supposons qu'un point N quelconque situé sur le plan moyen (ou plan neutre) de la lame subisse un déplacement purement transversal défini par :

$$\begin{cases} w_x = 0 \\ w_y = W_y \sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_v} x - \omega t\right) \end{cases} \tag{7.16}$$

(le problème est supposé invariant par translation suivant l'axe Oz).

Ce déplacement correspond à une onde progressive de longueur d'onde λ_v qui se propage le long de l'axe Ox (dans le sens des x croissants) avec une vitesse de phase $v_\varphi = \omega\lambda_v/2\pi$. L'épaisseur h de la lame étant petite devant ses autres dimensions, la déformation de flexion peut être décrite en considérant que, au cours de leur rotation, les section droites (NM) restent perpendiculaires au plan neutre (hypothèses de Kirchhoff valables pour les plaques minces [**75**]). Dans ces conditions, le champ de

déplacement est déterminé par les équations :

$$\begin{cases} u_x = -y\dfrac{\partial w_y}{\partial x} \\ u_y = w_y \end{cases} \tag{7.17}$$

Un point M de la surface vibrante décrit donc une trajectoire définie par :

$$\begin{cases} u_x(M) = -\dfrac{\pi h W_y}{\lambda_v}\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_v}x - \omega t\right) \\ u_y(M) = W_y \sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_v}x - \omega t\right) \end{cases} \tag{7.18}$$

Ainsi, sous l'effet de la propogation de l'onde, un mouvement particulaire elliptique est obtenu à la surface de la lame. La vitesse vibratoire longitudinale (selon Ox) est maximale au niveau des crêtes de l'onde. Par conséquent, en supposant que le contact avec l'élément mobile s'établisse de manière ponctuelle (dans le plan xOy) sous une condition de roulement sans glissement, on obtient pour la vitesse d'entraînement théorique :

$$v_e = -\frac{\omega\pi h W_y}{\lambda_v} \tag{7.19}$$

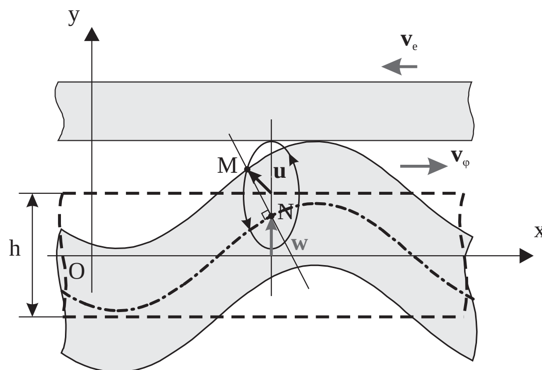


Figure 7.5 Cinématique de l'entraînement par onde progressive

Remarquons enfin que l'onde progressive définie par (7.16) résulte formellement de la composition de deux ondes stationnaires w_1 et w_2 décalées dans l'espace d'un quart de longueur d'onde et excitées dans le temps en quadrature de phase, conformément à :

$$\begin{cases} w_{y_1} = W_y \cos(\omega t)\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_v}x\right) \\ w_{y_2} = W_y \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_v}x - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{7.20}$$

Ainsi, la déformation glissante pourra être directement obtenue à l'aide d'un système d'excitation piézoélectrique *diphasé* convenablement agencé et alimenté.

Ce principe d'entraînement est directement exploité dans les piézomoteurs linéaires ou rotatifs *à ondes progressives*. Une variante particulièrement aboutie de ce type de structure est décrite au paragraphe 7.5.2.

7.5 DIFFÉRENTS CONCEPTS DE PIÉZOMOTEURS

Bien que relativement récente, la technologie des actionneurs à effet piézoelectrique donne lieu à une grande variété de structures. En outre, sous la poussée de nouvelles applications, l'effort d'innovation technologique est particulièrement marqué dans ce domaine. Aussi, l'élaboration d'un catalogue exhaustif des divers types d'actionneurs décrits dans la littérature paraît à ce jour prématurée. On peut cependant en saisir les principales spécificités au travers de quelques exemples particulièrement révélateurs des nouvelles possibilités offertes.

7.5.1 Actionneur rotatif « à pinces »

Parmi les concepts d'entraînement les plus intuitifs, le moteur « inchworm » tient une place de choix. Comme son nom l'indique, son fonctionnement procède d'une analogie avec le mode de locomotion des vers de terre. Décliné en mode linéaire ou rotatif, son principe revient à la composition de deux mouvements synchronisés. Le premier permet la préhension d'un support (fixe ou mobile), tandis que le second vise à l'extension du corps supportant les organes préhenseurs.

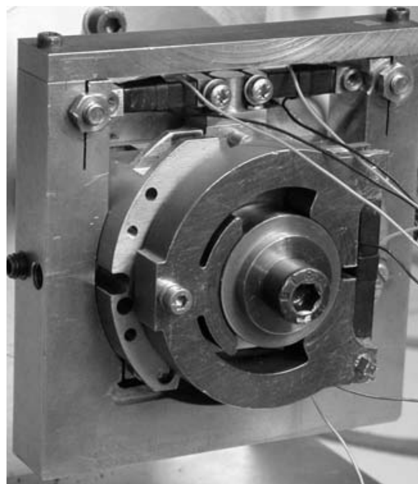


Figure 7.6 Piézomoteur rotatif à pinces activé au moyen d'éléments piézoélectriques multicouches (© INPT/CNRS/D.H.)

La figure 7.6 montre les parties actives d'un prototype de piézomoteur rotatif dérivant directement de ce concept. La fonction de préhension est assurée par un système de pinces enserrant l'arbre de sortie. L'ouverture de la pince est contrôlée par l'allongement d'un élément piézoélectrique multicouches. Quant à la mise en rotation de l'équipage mobile, elle est obtenue au moyen d'une paire d'éléments piézoélectriques antagonistes commandés en opposition de phase.

Excité en régime non résonnant à faible fréquence, ce type d'architecture permet de disposer d'efforts moteurs très intenses à basse vitesse, tout en bénéficiant de la simplicité d'un *entraînement direct* (sans étages de réduction). Pour l'exemple considéré, le couple statique ainsi obtenu s'élève à près de 10 N.m. La fréquence de rotation à vide est de l'ordre de 10 tr.min^{-1} (pour une fréquence d'excitation d'environ 400 Hz). L'actionneur pèse moins de $1{,}5$ kg, soit une masse 3 à 4 fois inférieure à celle d'un moteur électromagnétique (à aimants permanents) capable du même couple statique.

7.5.2 Moteur annulaire à ondes progressives

Grâce à l'effort de recherche important dont il a fait l'objet, au Japon tout d'abord puis en Europe, le moteur à onde progressive à stator annulaire et contact axial constitue sans nul doute une des structures de piézomoteurs les plus achevées à ce jour. Son principe de fonctionnement est schématisé sur la figure 7.7.

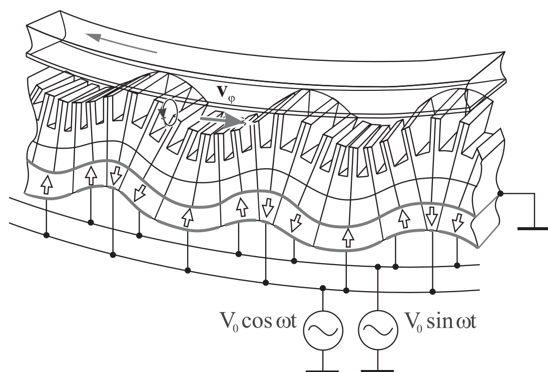


Figure 7.7 Principe de fonctionnement du moteur annulaire à onde progressive

Le stator consiste en un résonnateur en bronze béryllium à l'arrière duquel est collé un anneau de céramiques PZT assurant la mise en rotation d'un mode de flexion hors plan. L'excitation à fréquence ultrasonore des deux ondes stationnaires requises (cf. § 7.4.2) est obtenue par couplage électroélastique transversal : la céramique, polarisée suivant son épaisseur, se déforme selon une direction orthoradiale, provoquant

ainsi la déformation de flexion recherchée grâce à un effet de bilame. La sélection du rang de mode (fixant le nombre de ventres et de noeuds) résulte conjointement du choix de la fréquence d'excitation et d'une polarisation appropriée de l'anneau de céramique. L'alternance de polarisation doit en effet correspondre avec la longueur d'onde choisie. Cette adéquation permet de maximiser le coefficient de couplage électromécanique effectif du transducteur. Quant aux deux phases d'alimentation, elles sont créées à l'aide de deux jeux d'électrodes convenablement décalés, l'électrode arrière servant de masse commune aux deux sources diphasées. Par ailleurs, l'anneau statorique est généralement pourvu de dents dont le rôle principal est d'augmenter l'épaisseur (h) de la structure sans pour autant en diminuer la compliance. En vertu de (7.19), cette disposition a directement pour effet d'accroître la vitesse de rotation du moteur.

En ce qui concerne le rotor, il est constitué d'un disque, le plus souvent en duralumin, muni d'une jante extérieure rigide à la base de laquelle s'exercent les efforts d'entraînement. L'effort axial est calibré par compression d'un ressort extérieur ou bien par déformation élastique du disque rotorique lui-même.



Figure 7.8 Stator et rotor d'un prototype de piézomoteur à onde progressive (diamètre extérieur : 45 mm, couple statique : 0, 9 N.m, vitesse à vide : 150 tr.min^{-1} © INPT/ENSEEIHT/D.H.)

Comme on peut le voir sur la figure 7.8, les pièces constitutives d'un tel moteur se révèlent relativement simples d'un point de vue géométrique. Un soin tout particulier doit cependant être apporté au traitement de l'interface à travers laquelle les efforts statoriques sont transmis au rotor. À cette fin, une des deux pièces en contact (généralement le rotor) est revêtue d'une couche de frottement permettant d'optimiser les conditions de contact. En fonction des spécifications du cahier des charges,

on pourra adopter une couche plus ou moins dure selon que l'on privilégie la vitesse ou l'effort développé par le moteur. Une couche dure aura pour effet de minimiser l'aire effective du contact au niveau des crêtes de l'onde, optimisant ainsi les conditions de redressement du mouvement vibratoire. La vitesse à vide tendra alors vers la vitesse théorique (7.19) obtenue en supposant un contact linéique (ponctuel dans le plan xOy). Au contraire, la mise en jeu d'une couche moins dure, donnant lieu à une zone d'interaction élargie, favorisera la transmission des efforts sous une pression de contact moindre. Outre ses conséquences en termes de performances électromécaniques globales, cette optimisation se révèle déterminante quant à la durée de vie du moteur (usure de la couche de friction).

7.5.3 Actionneurs à plusieurs degrés de liberté

Comme en témoignent les deux exemples précédents, le concept de piézomoteur constitue une alternative performante aux solutions électromagnétiques dès lors que l'on privilégie l'effort massique plutôt que la vitesse ou la puissance utile. Cet avantage s'exprime d'une manière particulièrement marquée dans le domaine des motorisations de dimensions centimétriques ou millimétriques.

Au-delà des gains substantiels qu'ils laissent espérer d'un point de vue quantitatif, les piézoactionneurs ouvrent également la voie à de nouvelles fonctionnalités jusqu'alors difficiles à atteindre avec les convertisseurs électromagnétiques. Tel est le cas des dispositifs intégrant plusieurs degrés de liberté. La production de mouvements autres que des translations ou des rotations simples, à l'aide d'effets purement électromagnétiques, s'avère par principe délicate. L'explication tient au fait que les guidages multidimensionnels (liaison rotoïde, guidage plan, etc.) s'accommodent relativement mal de la présence d'un entrefer. Aussi, les mécanismes multidegrés de liberté procèdent généralement d'une chaîne cinématique sophistiquée, combinant plusieurs axes de motorisation élémentaires (le plus souvent des moteurs rotatifs). Or, le principe d'un entraînement par contact permet précisément de surmonter cette difficulté, tout au moins sur le plan fonctionnel. En effet, dans les piézoactionneurs, rien ne s'oppose à ce que les fonctions d'entraînement et de guidage soient avantageusement confondues.

Une démonstration concrète de cette idée est donnée au travers du translateur plan schématisé sur la figure 7.9. Le principe d'entraînement retenu exploite la vibration d'une simple plaque métallique munie de céramiques piézoélectriques disposées sur sa face supérieure. Grâce à l'excitation combinée de plusieurs modes de résonance, différentes conditions vibratoires peuvent être sélectionnées. Ainsi, en jouant sur la fréquence et la phase des tensions v_1 et v_2 appliquées sur les deux voies d'alimentation, on peut contrôler le mouvement de la plaque suivant les quatre axes de translation élémentaires $\left(x^+, x^-, y^+, y^-\right)$. De par sa simplicité, tant en termes de structure que de commande, ce principe représente une solution toute indiquée pour motoriser, par exemple, un système de micromanipulation [**76**].

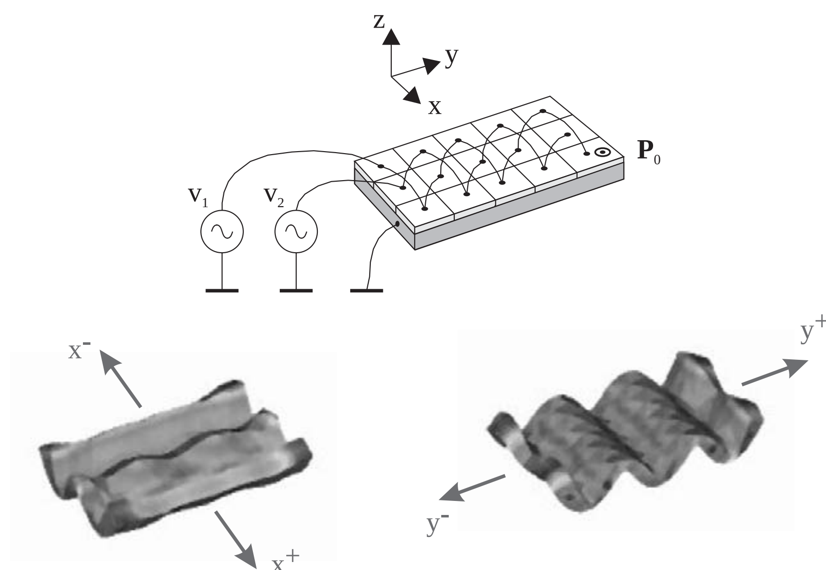


Figure 7.9 Translateur piézoélectrique plan à combinaison de modes

Soulignons enfin, sur un plan plus général, que l'usage des matériaux électroactifs apporte une réponse prometteuse au problème de l'intégration poussée des fonctions motrices. À l'inverse d'une conception « centralisée » de l'organe de conversion, il s'agit peu à peu d'en « distribuer » les cellules au sein même de la structure à activer. On mesure d'ores et déjà les retombées potentielles de cette tendance dans des secteurs tels que la médecine (muscle artificiel) ou l'aéronautique (aile électroactive) [**77**]. Ainsi, avec le concept d'*interaction électromécanique répartie*, il semble bien que soit inaugurée une page inédite de l'électrodynamique appliquée.

EXERCICES ET PROBLÈMES

7.1. Cylindre piézoélectrique en régime quasistatique

Considérons un cylindre de céramique PZT, de rayon a et de hauteur b, polarisé suivant son axe de symétrie (axe $Oz = Ox_3$). Le champ électrique est supposé uniforme à l'intérieur de l'élément et dirigé suivant Oz. Le cylindre n'est soumis à aucune action mécanique d'origine extérieure.

a) Rappeler les équations constitutives des modes longitudinal et transversal.

b) En supposant que les deux déformations sont indépendantes, déterminer l'allongement du cylindre et la variation de son rayon lorsqu'une différence de potentiel v_a est appliquée entre ses électrodes.

(Réponse : $\Delta b = d_{33} v_a$; $\Delta a = \dfrac{a}{b} d_{31} v_a$)

c) En déduire la variation relative de volume du cylindre.

(Réponse : $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{d_{33} + 2d_{31}}{b} v_a$)

7.2. Couplage électroélastique en mode planaire

On considère une plaque mince de céramique PZT, de forme carrée, polarisée suivant son épaisseur. Le couplage électroélastique exploité s'effectue suivant un mode purement transversal.

a) Rappeler l'expression du potentiel thermodynamique relatif au choix des variables indépendantes (T, E) dans le cas où l'on exploite la céramique de manière uniaxiale ($T_1 = T, T_2 = T_3 = 0$).

(Réponse : $G = -\dfrac{1}{2} s_{11}^E T^2 - d_{31} T E - \dfrac{1}{2} \epsilon_{33}^T E^2$)

b) En déduire l'expression du coefficient de couplage intrinsèque en mode transversal.

(Réponse : $k_{31} = \sqrt{\dfrac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}}$)

c) En introduisant le coefficient de Poisson $\sigma_p = -\dfrac{s_{12}^E}{s_{11}^E}$, reprendre les questions précédentes dans le cas d'une exploitation en mode planaire ($T_1 = T_2 = T, T_3 = 0$).

(Réponse : $G = -s_{11}^E \left(1 - \sigma_p\right) T^2 - 2d_{31} T E - \dfrac{1}{2} \epsilon_{33}^T E^2$; $k_p = k_{31} \sqrt{\dfrac{2}{\left(1 - \sigma_p\right)}}$)

7.3. Actionneur bilame en flexion

On considère un bilame piézoélectrique obtenu en collant une lame de céramique PZT, polarisée suivant son épaisseur h, contre une lame métallique de mêmes dimensions que l'élément piézoélectrique. La longueur a de l'assemblage est supposée grande devant sa largeur b et son épaisseur totale. Le bilame, encastré à l'une de ses extrémités, subit une déformation de flexion sous l'effet de la tension v_a appliquée entre les électrodes de la céramique. On suppose que les deux matériaux présentent la même souplesse mécanique $\left(s_{11}^E\right)$. Dans ces conditions, la déformation de flexion peut être décrite à l'aide d'un raisonnement similaire à celui du paragraphe 7.4.2 (hypothèses de Kirchhoff), le plan neutre étant situé à l'interface de la céramique et du substrat.

a) Rappeler les équations de la piézoélectricité en mode transversal.

b) Le barreau n'étant soumis à aucune force d'origine extérieure, déterminer le déplacement u (suivant Oz) obtenu à l'extrémité libre du bilame en fonction du champ électrique appliqué.

(Réponse : $u = \frac{3}{8}\frac{a^2 d_{31}}{h^2} v_a$)

c) Reprendre la question dans le cas où une force d'intensité f_a, dirigée suivant l'axe du déplacement, est appliquée à l'extrémité du bilame.

(Réponse : $u = \frac{3}{8}\frac{a^2 d_{31}}{h^2} v_a + \frac{a^3 s_{11}^E}{bh^3} f_a$)

Annexe

Notions élémentaires sur les tenseurs

Si le calcul vectoriel est une technique largement exploitée en mécanique ou en électrodynamique, l'ensemble des grandeurs physiques associées à ces disciplines ne peut être exclusivement représenté par des vecteurs de l'espace euclidien à trois dimensions. On peut citer par exemple le problème lié à la caractérisation des propriétés élastiques de la matière : neuf nombres sont a priori nécessaires pour décrire les forces de tension interne (contraintes) développées en chaque point d'un solide déformable. Le champ électromagnétique, de par sa nature relativiste, constitue également une notion que le seul calcul vectoriel ne peut appréhender de manière satisfaisante. Ainsi, dès la fin du XIXe siècle, l'introduction de nouveaux êtres mathématiques appelés *tenseurs*, en référence à la signification particulière qu'ils prennent en élasticité, a joué un rôle déterminant dans le développement de la physique des milieux continus. Soulignons que la théorie de la relativité doit en partie son développement à l'existence préalable du calcul tensoriel. En vertu du premier postulat d'Einstein, les équations fondamentales qui décrivent les lois de la physique doivent pouvoir être exprimées sous une forme indépendante du système de référence dans lequel elles sont formulées, ce que permet précisément l'outil tensoriel.

Les notions très succintes données ci-après sur les tenseurs ont essentiellement pour but de préciser les conventions d'écriture utilisées et les règles élémentaires associées à la manipulation des expressions tensorielles introduites dans le présent ouvrage. Une présentation plus complète du sujet est accessible dans de nombreux

ouvrages au sein desquels les techniques du calcul tensoriel sont largement confrontées aux problèmes de la physique [**33**] [**34**] [**35**]. Pour le lecteur désireux d'approfondir la question sur un plan plus théorique, on peut recommander l'ouvrage de L. Schwartz [**32**].

A.1 CONVENTIONS D'ÉCRITURE

A.1.1 Notation indicielle

Soit E_n un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Un vecteur quelconque $\mathbf{x}$ de cet espace s'écrit :

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n = \sum_{\lambda=1}^{n} x^\lambda \mathbf{e}_\lambda \qquad (.1)$$

où $x^1, x^2, \ldots, x^n$ désignent les coordonnées du vecteur $\mathbf{x}$ rapporté à cette base.

La répétition de l'indice λ dans le terme générique de la somme définissant le vecteur $\mathbf{x}$ peut être considérée en soi comme une indication de la sommation effectuée. Dès lors, conformément à la convention de *sommation sur les indices répétés*, on écrira plus simplement :

$$\mathbf{x} = \sum_{\lambda=1}^{n} x^\lambda \mathbf{e}_\lambda = x^\lambda \mathbf{e}_\lambda \qquad (.2)$$

Lorsque aucune ambiguïté n'est possible, nous conviendrons également de ne pas préciser le domaine sur lequel s'effectue la sommation. De manière générale, nous réservons les indices romains aux sommations relatives à l'espace à trois dimensions ($i, j, k, \ldots$ varient de 1 à 3), tandis que les lettres grecques sont utilisées dans les autres cas ($\lambda, \mu, \sigma, \ldots$ varient par exemple de 0 à 3 dans l'espace quadridimensionnel de la relativité restreinte). Remarquons qu'il conviendra de distinguer les indices *muets,* faisant l'objet d'une sommation, des indices *libres* associés à un terme particulier. Ainsi, dans l'expression :

$$A_i^k y_k = A_i^1 y_1 + A_i^2 y_2 + A_i^3 y_3 \qquad (.3)$$

l'indice k est muet (et peut donc être remplacé par toute autre lettre) tandis que l'indice libre i spécifie le $i^{ème}$ terme de l'expression (.3). Dans la formulation d'une équation, les indices libres intervenant dans les deux membres doivent se correspondre un à un, et cela en respectant la position (inférieure ou supérieure) à laquelle ils apparaissent. Comme nous le justifierons plus loin, ces règles permettent en pratique de contrôler que les deux objets constituant les deux membres de l'équation sont bien de même « nature » (sans quoi la relation écrite serait absurde, ou tout au moins fortuite).

A.1.2 Symbole de Kronecker et symbole d'antisymétrie

L'écriture de relations sous forme indicielle est facilitée par l'utilisation de symboles prenant des valeurs particulières en fonction des indices dont ils dépendent.

Ainsi, le *symbole de Kronecker* $\delta_{\lambda\mu}$ est défini par :

$$\delta_{\lambda\mu} = \delta^{\lambda\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \mu \end{cases} \tag{.4}$$

Un autre symbole largement utilisé est le *symbole d'antisymétrie* tel que :

$$\epsilon^{\lambda\mu\rho} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda,\ \mu,\ \rho \text{ sont dans un ordre issu d'un nombre} \\ & \text{pair de permutations de la séquence } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si } \lambda,\ \mu,\ \rho \text{ sont dans un ordre issu d'un nombre} \\ & \text{impair de permutations de la séquence } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{si deux quelconques des indices sont égaux} \end{cases} \tag{.5}$$

On aura donc par exemple :

$$\begin{cases} \epsilon^{312} = 1 \\ \epsilon^{321} = -1 \\ \epsilon^{112} = 0 \end{cases} \tag{.6}$$

A.1.3 Formulation matricielle

Il peut être commode de transcrire l'écriture indicielle précédemment introduite sous forme de relations matricielles. Considérons par exemple les relations traduisant le passage entre deux systèmes de référence associés à deux bases $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ et $\left(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\right)$ d'un espace vectoriel E_n. Chaque vecteur de l'une des deux bases peut être décomposé sur l'autre conformément aux relations de passage définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_\mu &= \mathcal{P}^{\lambda}_{\mu} \mathbf{e}_\lambda \\ \mathbf{e}_\lambda &= \mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda} \mathbf{e}'_\mu \end{aligned} \tag{.7}$$

La transcription de ces relations sous forme matricielle s'écrira :

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{e}'_\mu\right] &= \left[\mathcal{P}_\mu{}^{\lambda}\right] [\mathbf{e}_\lambda] \\ [\mathbf{e}_\lambda] &= \left[\mathcal{P}'_\lambda{}^{\mu}\right] \left[\mathbf{e}'_\mu\right] \end{aligned} \tag{.8}$$

en convenant que l'indice le plus proche des lettres support désignant le terme générique des matrices utilisées correspond à l'indice de ligne (par exemple λ dans le cas de la matrice à n lignes et n colonnes $\left[\mathcal{P}'_\lambda{}^{\mu}\right]$). Dans ces relations, les matrices $[\mathbf{e}_\lambda]$ et $\left[\mathbf{e}'_\mu\right]$ correspondent à des matrices uni-colonnes (λ et μ sont accolés à la lettre **e**). Remarquons qu'avec cette convention, l'opération de transposition revient à un déplacement latéral en sens contraire des indices concernés (en conservant leur position haute ou basse). Ainsi, $\left[B^{\mu}{}_{\lambda}\right]$ désignera la matrice transposée de $\left[A_\lambda{}^{\mu}\right]$, avec, pour tout couple (λ, μ), la relation $B^{\mu}{}_{\lambda} = A_\lambda{}^{\mu}$ au niveau des composantes.

Les relations (.7) entraînent :

$$\mathbf{e}_\lambda = \mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}\mathbf{e}'_\mu = \mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\mathbf{e}_\sigma \tag{.9}$$

d'où les n^2 relations scalaires :

$$\mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = \delta^{\sigma}_{\lambda} \tag{.10}$$

Écrite sous forme matricielle à partir des relations (.8), cette condition traduit le fait que $\left[\mathcal{P}'_{\lambda}{}^{\mu}\right]$ est la matrice inverse de $\left[\mathcal{P}_{\mu}{}^{\lambda}\right]$.

A.2 COMPLÉMENTS SUR LES VECTEURS

A.2.1 Produit scalaire

La convention de sommation sur les indices répétés introduite à la section A.1.1 s'étend aisément au cas des sommes multiples où figurent plusieurs indices muets. En particulier, le produit scalaire de deux vecteurs quelconques **x** et **y** s'écrit conformément à la notation adoptée :

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x^\lambda y^\mu \mathbf{e}_\lambda\cdot\mathbf{e}_\mu \tag{.11}$$

expression qui fait intervenir n^2 termes élémentaires dans le cas d'un espace de dimension n. En posant :

$$g_{\lambda\mu} = \mathbf{e}_\lambda\cdot\mathbf{e}_\mu \tag{.12}$$

l'expression générale du produit scalaire devient alors :

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = g_{\lambda\mu}x^\lambda y^\mu \tag{.13}$$

Le tableau des nombres $g_{\lambda\mu}$ forme un opérateur dénommé *tenseur fondamental* ou *tenseur métrique* qui définit entièrement les propriétés du produit scalaire que l'on se donne sur l'espace vectoriel considéré. Un espace vectoriel sur lequel on a défini un produit scalaire est appelé espace vectoriel *pré-euclidien*. Deux vecteurs **x** et **y** d'un espace vectoriel pré-euclidien sont dits orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul. Lorsque les n vecteurs de base sont orthogonaux entre eux, les termes $g_{\lambda\mu}$ sont nuls pour $\lambda \neq \mu$.

Le produit scalaire correspond à une loi de composition commutative. Par suite, les composantes du tenseur fondamental satisfont à la condition de symétrie $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$. De plus, une propriété supplémentaire du produit scalaire impose que le déterminant de la matrice des $g_{\lambda\mu}$ soit nécessairement non nul.

Dans le cas où les termes $g_{\lambda\mu}$ pour $\lambda = \mu$ sont strictement positifs, la norme d'un vecteur (dont le carré s'identifie au produit scalaire $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$) est un nombre positif ou nul et l'espace vectoriel est alors qualifié d'*euclidien*. Si cet espace est rapporté à une

base orthogonale dont les vecteurs ont une norme égale à l'unité (base orthonormée), les $g_{\lambda\mu}$ seront définis par :

$$g_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} \tag{.14}$$

A.2.2 Composantes contravariantes et covariantes

La décomposition d'un vecteur $\mathbf{x}$ de E_n sur les deux bases précédemment introduites permet d'établir, à l'aide des relations (.7), les lois de transformation auxquelles ses composantes sont assujetties :

$$\mathbf{x} = x^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda} = x^{\lambda}\mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}\mathbf{e}'_{\mu} = x'^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu} = x'^{\mu}\mathcal{P}^{\lambda}_{\mu}\mathbf{e}_{\lambda} \tag{.15}$$

d'où :

$$\begin{aligned} x^{\lambda} &= \mathcal{P}^{\lambda}_{\mu}x'^{\mu} \\ x'^{\mu} &= \mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}x^{\lambda} \end{aligned} \tag{.16}$$

soit encore, sous forme de matrices :

$$\begin{aligned} \left[x^{\lambda}\right] &= \left[\mathcal{P}^{\lambda}{}_{\mu}\right]\left[x'^{\mu}\right] \\ \left[x'^{\mu}\right] &= \left[\mathcal{P}'^{\mu}{}_{\lambda}\right]\left[x^{\lambda}\right] \end{aligned} \tag{.17}$$

La comparaison des relations (.7) et (.16) montre que les composantes x^{λ} et x'^{μ} obéissent à des lois de changement de base contraires à celles que suivent les vecteurs de la base. Ces composantes sont ainsi dénommées composantes *contravariantes*. Elles seront désignées par un indice supérieur.

D'autre part, le produit scalaire d'un vecteur $\mathbf{x} = x^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda}$ par un vecteur de base $\mathbf{e}_{\mu}$ fait apparaître de nouvelles composantes x_{μ} définies par :

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_{\mu} = x^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda}\cdot\mathbf{e}_{\mu} = x^{\lambda}g_{\lambda\mu} = x_{\mu} \tag{.18}$$

Ces composantes sont quant à elles assujetties aux relations de passage :

$$\begin{aligned} x_{\lambda} &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_{\lambda} = \mathbf{x}\cdot\mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}\mathbf{e}'_{\mu} = \mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}'_{\mu} = \mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda}x'_{\mu} \\ x'_{\mu} &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}'_{\mu} = \mathbf{x}\cdot\mathcal{P}^{\lambda}_{\mu}\mathbf{e}_{\lambda} = \mathcal{P}^{\lambda}_{\mu}\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_{\lambda} = \mathcal{P}^{\lambda}_{\mu}x_{\lambda} \end{aligned} \tag{.19}$$

Suivant une loi de transformation identique à celle des vecteurs de la base, les quantités x_{λ} et x'_{μ} seront appelées composantes *covariantes* du vecteur $\mathbf{x}$. On les désigne à l'aide d'un indice inférieur.

Remarquons que dans le cas particulier d'un espace rapporté à une base orthonormée, il n'y a pas lieu de distinguer les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur donné. On a en effet dans ce cas, en vertu des relations (.14) et (.18) :

$$x_{\mu} = x^{\lambda}g_{\lambda\mu} = x^{\lambda}\delta_{\lambda\mu} = x^{\mu} \tag{.20}$$

Lorsque nous serons confrontés à une telle situation (par exemple lors de la manipulation des équations de l'élasticité en coordonnées cartésiennes), nous conviendrons dans ce cas de placer systématiquement les indices en position basse.

Notons par ailleurs que le système d'équations (.18) définissant les x_μ en fonction des composantes x^λ peut être inversé (det $\left[g_{\lambda\mu}\right] \neq 0$), si bien que l'on pourra écrire :

$$x^\mu = g^{\mu\lambda} x_\lambda \qquad (.21)$$

où les termes $g^{\mu\lambda}$ constituent, à l'instar des $g_{\lambda\mu}$, un tableau symétrique ($g^{\mu\lambda} = g^{\lambda\mu}$) et vérifient en outre de manière évidente la relation $g^{\mu\lambda} g_{\rho\lambda} = \delta^\mu_\rho$.

D'un point de vue purement typographique, retenons que l'action d'un terme $g_{\lambda\mu}$ au sein d'une sommation revient à un abaissement des indices concernés, tandis que les termes $g^{\lambda\mu}$ agissent en sens inverse.

Dès lors, l'utilisation des composantes contravariantes et covariantes permet d'établir différentes formulations du produit scalaire de deux vecteurs **x** et **y** :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu = g^{\mu\lambda} x_\lambda y_\mu = x^\lambda y_\lambda = x_\mu y^\mu \qquad (.22)$$

Selon une forme d'écriture particulièrement concise, le produit scalaire procède ainsi d'une sommation sur des indices de variance différente (opération appelée *contraction d'indice* dans la terminologie des tenseurs). Cette formulation traduit le caractère *invariant* du produit scalaire dont la réalité intrinsèque, de même que celle d'un vecteur, est indépendante du système de référence choisi.

A.2.3 Espace dual

Il convient de noter que les coordonnées covariantes prennent tout leur sens dès lors que l'on considère l'espace *dual* associé à l'espace vectoriel initial. Ce dernier étant muni d'un produit scalaire, on peut en effet définir l'ensemble des formes linéaires $\widetilde{x}$ qui à tout vecteur **y** de E_n associe le nombre réel $\widetilde{x}\,(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. L'introduction des lois d'addition et de multiplication par un scalaire définit alors sur cet ensemble une structure d'espace vectoriel, de même dimension que E_n et noté E_n^*. L'isomorphisme qui s'établit entre l'espace initial et son dual (le produit scalaire jouit de propriétés de linéarité) entraîne que l'on peut confondre en un même objet les vecteurs et les formes linéaires qui leur sont associées.

S'agissant d'une base de l'espace dual, on peut légitimement choisir celle qui résulte des formes linéaires associées aux vecteurs de base de E_n et telles que :

$$\widetilde{e}^\mu\,(\mathbf{e}_\lambda) = \delta^\mu_\lambda \qquad (.23)$$

ce qui entraîne en particulier :

$$x_\mu \widetilde{e}^\mu \left(y^\lambda \mathbf{e}_\lambda\right) = x_\mu y^\lambda \delta^\mu_\lambda = x_\mu y^\mu = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \qquad (.24)$$

La forme linéaire définie par l'expression (.24) n'est autre que la forme $\widetilde{x}$ précédemment construite à partir du vecteur $\mathbf{x}$. Par conséquent, les quantités x_μ apparaissent comme les composantes de la forme linéaire associée au vecteur $\mathbf{x}$, décomposée sur la *base duale* $\left(\widetilde{e}^1, \widetilde{e}^2, \ldots, \widetilde{e}^n\right)$. Les composantes contravariantes x^μ et covariantes x_μ, respectivement associées aux vecteurs de base $\mathbf{e}_\mu$ et $\widetilde{e}^\mu$, ne sont donc que deux traductions différentes d'un seul et même être mathématique, le vecteur $\mathbf{x}$. On peut enfin vérifier que la position supérieure des indices qui identifient les vecteurs de la base duale est tout fait cohérente avec le fait que ces vecteurs se transforment, comme les composantes contravariantes, suivant une loi du type (.16) :

$$x'^\mu = \widetilde{e}'^\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{P}'^\mu_\lambda x^\lambda = \mathcal{P}'^\mu_\lambda \widetilde{e}^\lambda(\mathbf{x}) \tag{.25}$$
$$x^\lambda = \widetilde{e}^\lambda(\mathbf{x}) = \mathcal{P}^\lambda_\mu x'^\mu = \mathcal{P}^\lambda_\mu \widetilde{e}'^\mu(\mathbf{x})$$

d'où :

$$\widetilde{e}^\lambda = \mathcal{P}^\lambda_\mu \widetilde{e}'^\mu \tag{.26}$$
$$\widetilde{e}'^\mu = \mathcal{P}'^\mu_\lambda \widetilde{e}^\lambda$$

A.2.4 Bases réciproques

Soient $(\mathbf{e}^\mu)$ un ensemble de n vecteurs définis par :

$$\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}^\mu = \delta_{\lambda\mu} \tag{.27}$$

On montre que ces vecteurs forment une base, appelée *base réciproque* de E_n. La condition de passage entre les vecteurs de base $\mathbf{e}_\lambda$ et les vecteurs réciproques $\mathbf{e}^\mu$ s'écrivant :

$$\mathbf{e}_\lambda = \mathcal{S}'^\mu_\lambda \mathbf{e}^\mu \tag{.28}$$

il vient :

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathcal{S}'^\sigma_\lambda \mathbf{e}^\sigma = \mathcal{S}'^\sigma_\lambda \delta_{\mu\sigma} = \mathcal{S}'^\mu_\lambda = g_{\mu\lambda}$$

et par conséquent :

$$\mathbf{e}_\lambda = g_{\lambda\mu} \mathbf{e}^\mu \tag{.29}$$

Par analogie avec la relation (.21), on obtient de même pour la transformation inverse :

$$\mathbf{e}^\mu = g^{\lambda\mu} \mathbf{e}_\lambda \tag{.30}$$

Les composantes d'un vecteur $\mathbf{x}$ quelconque, décomposé sur la base réciproque $(\mathbf{e}^\mu)$, correspondent aux composantes covariantes de $\mathbf{x}$ par rapport à la base $(\mathbf{e}_\lambda)$:

$$\mathbf{x} = x_\lambda \mathbf{e}^\lambda \tag{.31}$$

On vérifie en effet que :

$$x_\mu = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\mu = \left(x_\lambda \mathbf{e}^\lambda\right) \cdot \mathbf{e}_\mu = x_\lambda \delta_{\lambda\mu} \tag{.32}$$

Il vient alors :

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^{\lambda} = \left(x^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}\right)\cdot\mathbf{e}^{\lambda} = x^{\mu}\delta_{\lambda\mu} = x^{\lambda} \qquad (.33)$$

Par conséquent, de même que la relation (.18) fait apparaître les quantités $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_{\lambda}$ comme les composantes covariantes du vecteur $\mathbf{x}$ par rapport à la base $(\mathbf{e}_{\lambda})$, les quantités $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^{\lambda}$ s'identifient, conformément à la relation (.33), aux composantes covariantes du vecteur $\mathbf{x}$ par rapport à la base $(\mathbf{e}^{\lambda})$. Les mêmes quantités $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_{\lambda}$ s'identifient réciproquement aux composantes contravariantes de $\mathbf{x}$ dans la base $(\mathbf{e}^{\lambda})$, tandis que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^{\lambda}$ correspond aux composantes contravariantes de $\mathbf{x}$ rapporté à la base $(\mathbf{e}_{\lambda})$. La base réciproque joue donc un rôle parfaitement symétrique de celui de la base d'origine, une composante covariante dans une des bases étant contravariante dans l'autre base. Reprenant les considérations de dualité introduites au paragraphe A.2.3, il apparaît que la base réciproque $(\mathbf{e}^{\lambda})$ peut être confondue avec la base duale $\left(\widetilde{e}^{\lambda}\right)$, en vertu de l'isomorphisme établi entre les espaces E_n et E_n^* grâce au produit scalaire.

A.2.5 Espaces affines

Les propriétés que décrivent les lois de la physique étant généralement attachées à chacun des *points* de l'espace, la définition des *champs* de vecteurs ou de tenseurs correspondants repose sur la notion d'*espace affine*, ou *espace ponctuel*. Un tel espace $\mathcal{E}_n$ est rapporté à un *repère* $(O, \mathbf{e}_{\lambda})$, O désignant le point origine et $\mathbf{e}_{\lambda}$ les vecteurs de base de l'espace vectoriel associé E_n. Chaque point M de $\mathcal{E}_n$ est alors repéré par un ensemble de *coordonnées* x^{λ} qui s'identifient aux composantes du vecteur associé $\mathbf{OM} = x^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda}$ de E_n.

La distance entre deux points M et M' correspond par définition à la norme du vecteur $\mathbf{MM}'$. Dès lors, en vertu de la relation (.22) définissant le produit scalaire, le carré de la distance ds entre deux points infiniment proches est donné par :

$$(ds)^2 = g_{\lambda\mu}dx^{\lambda}dx^{\mu} \qquad (.34)$$

A.2.6 Exemple des 4-vecteurs de la relativité restreinte

Dans le cadre de la relativité restreinte, tout évènement est associé à un quadrivecteur $\left(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z\right)$ où c désigne la vitesse de la lumière, t le temps, x, y, et z les coordonnées spatiales de l'évènement considéré. L'invariance de l'intervalle définie par $(ds)^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ induit une métrique correspondant au tenseur fondamental défini par la matrice :

$$\left[g_{\lambda\mu}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (.35)$$

Compte tenu de sa forme particulière, la matrice $\left[g_{\lambda\mu}\right]$ s'identifie à sa matrice inverse, d'où l'égalité $g^{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}$.

Parmi les transformations qui laissent invariant l'intervalle lors d'un changement de référentiel galiléen, la *transformation de Lorentz spéciale* permet d'exprimer les coordonnées (ct', x', y', z') d'un évènement rapporté à un référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction des coordonnées (ct, x, y, z) associé à un référentiel $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ étant animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation uniforme, de vitesse v le long de l'axe Ox dans le sens des x croissants (les axes des deux référentiels sont parallèles deux à deux et les origines de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident pour $t = t' = 0$). Cette transformation s'écrit, conformément aux notations précédemment introduites :

$$x'^{\mu} = \mathcal{L}'^{\mu}_{\lambda} x^{\lambda} \tag{.36}$$

$$\text{avec} \qquad \left[\mathcal{L}'^{\mu}{}_{\lambda}\right] = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta & 0 & 0 \\ -\sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où le paramètre ζ, appelé *rapidité*, est défini par les relations :

$$\begin{cases} \sinh\zeta = \gamma\beta \\ \cosh\zeta = \gamma \end{cases} \tag{.37}$$

$$\text{avec} \qquad \beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

La transformation inverse s'écrit, d'après (.16) :

$$x^{\lambda} = \mathcal{L}^{\lambda}_{\mu} x'^{\mu} \tag{.38}$$

La matrice $\left[\mathcal{L}'^{\lambda}{}_{\mu}\right]$, inverse de $\left[\mathcal{L}^{\mu}{}_{\lambda}\right]$ conformément à la relation (.10), s'obtient simplement en changeant le signe de β dans les expressions correspondantes ($\mathcal{R}$ est animé d'une vitesse $-v$ par rapport à $\mathcal{R}'$).

Quant à la transformation des coordonnées covariantes, les relations (.19) donnent :

$$x_{\lambda} = \mathcal{L}'^{\mu}_{\lambda} x'_{\mu} \tag{.39}$$

$$x'_{\mu} = \mathcal{L}^{\lambda}_{\mu} x_{\lambda}$$

La forme remarquable du tenseur fondamental défini par la relation (.35) induit des règles de transformation relativement simples entre les composantes contravariantes et covariantes. Le changement de position d'un indice spatial se traduit ainsi par un simple changement de signe ($x_i = -x^i$), tandis que les coordonnées temporelles ne subissent aucun changement ($x_0 = x^0$). Pour tout 4-vecteur $\mathbf{Q}$ de composante temporelle q^0 et dont les composantes q^1, q^2 et q^3 forment le vecteur spatial $\mathbf{q}$, nous adopterons la notation $q^{\lambda} = (q^0, \mathbf{q})$. Exprimé en fonction de ses composantes covariantes, ce 4-vecteur se mettra donc sous la forme $q_{\lambda} = (q^0, -\mathbf{q})$.

Parmi les différents 4-vecteurs qui jouent un rôle fondamental en électromagnétisme, on peut citer à titre d'exemple le 4-vecteur « courant » $\mathcal{J}^\lambda = (c\rho, \mathbf{j})$. Ce 4-vecteur regroupe en une seule entité les *sources du champ* liées, d'une part, à la densité volumique de charge ρ, et, d'autre part, à la densité de courant volumique $\mathbf{j}$.

A.3 INTRODUCTION AUX TENSEURS

Si les vecteurs précédemment étudiés peuvent être avantageusement manipulés par le biais de leurs composantes, on doit garder à l'esprit qu'ils constituent en soi des êtres mathématiques dont la nature intrinsèque est indépendante de la valeur particulière que prennent leurs composantes dans une base donnée. Pour le physicien, il s'agit en particulier d'exprimer à l'aide de ces entités une réalité physique générale, indépendamment du système de référence dans lequel elle est décrite.

La connaissance des règles de transformation auxquelles sont assujetties les composantes des entités manipulées lors d'un changement de référentiel constitue une préoccupation de première importance. En effet, c'est précisément parce qu'une suite de n quantités x^λ suivent des lois de transformation du type (.16) qu'elles forment un *vecteur* de E_n.

Nous allons voir que la généralisation des règles de transformation établies pour les vecteurs permet d'introduire de nouveaux êtres mathématiques, les *tenseurs*. Généralisant les notions de scalaire (tenseur d'ordre 0) et de vecteur (tenseur d'ordre 1), les tenseurs permettront d'exprimer des lois physiques relativement élaborées grâce à l'augmentation du nombre de leurs composantes : n^2 composantes pour un tenseur d'ordre 2, n^3 pour un tenseur d'ordre 3, etc. En outre, leur utilisation systématique permet d'accéder à une formulation *covariante* des lois de la physique, à savoir des lois dont la forme est invariante dans un changement de référentiel galiléen.

A.3.1 Définitions

Considérons un espace vectoriel E_n rapporté à deux bases $(\mathbf{e}_\lambda)$ et $\left(\mathbf{e}'_\mu\right)$ satisfaisant aux relations de passage (.7). Soient n^2 quantités $A^{\lambda\mu}$ se transformant selon les relations :

$$\begin{aligned} A^{\lambda\mu} &= \mathcal{P}^\lambda_\rho \mathcal{P}^\mu_\sigma A'^{\rho\sigma} \\ A'^{\rho\sigma} &= \mathcal{P}'^\rho_\lambda \mathcal{P}'^\sigma_\mu A^{\lambda\mu} \end{aligned} \quad (.40)$$

Par définition, les quantités $A^{\lambda\mu}$ constituent les composantes *contravariantes* d'un tenseur $\mathbf{A}$ d'ordre 2. De même, si n^2 quantités $A_{\lambda\mu}$ se transforment selon les relations :

$$\begin{aligned} A_{\lambda\mu} &= \mathcal{P}'^\rho_\lambda \mathcal{P}'^\sigma_\mu A'_{\rho\sigma} \\ A'_{\rho\sigma} &= \mathcal{P}^\lambda_\rho \mathcal{P}^\mu_\sigma A_{\lambda\mu} \end{aligned} \quad (.41)$$

alors, par définition, elles constituent les composantes *covariantes* d'un tenseur d'ordre 2. Enfin, n^2 quantités satisfaisant à une loi de transformation du type :

$$\begin{aligned} A_\lambda{}^\mu &= \mathcal{P}'^\rho_\lambda \mathcal{P}^\mu_\sigma A'_\rho{}^\sigma \\ A'_\rho{}^\sigma &= \mathcal{P}^\lambda_\rho \mathcal{P}'^\sigma_\mu A_\lambda{}^\mu \end{aligned} \tag{.42}$$

forment par définition les composantes *mixtes* d'un tenseur d'ordre 2.

On vérifiera aisément que les n^2 quantités obtenues en effectuant le produit des composantes de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, conformément à la relation $U^{\lambda\mu} = x^\lambda y^\mu$, constituent précisément les composantes contravariantes d'un tenseur $\mathbf{U}$ d'ordre 2 (on dira souvent « le tenseur $U^{\lambda\mu}$ »). Ce tenseur, appelé *produit tensoriel* des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ et noté $\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}$, constitue un élément d'un nouvel espace vectoriel noté $E_n^{(2)} = E_n \otimes E_n$ et appelé *espace produit tensoriel*. Une base de cet espace, appelée *base associée* à $(\mathbf{e}_\lambda)$, est formée des n^2 « vecteurs » $\mathbf{e}_\lambda \otimes \mathbf{e}_\mu$ ($\mathbf{U} = U^{\lambda\mu}\mathbf{e}_\lambda \otimes \mathbf{e}_\mu$). On peut également définir, à partir du produit tensoriel de vecteurs rapportés à leur base d'origine ou à leur base réciproque, les composantes covariantes d'un tenseur $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U} = U_{\lambda\mu}\mathbf{e}^\lambda \otimes \mathbf{e}^\mu$) ou ses composantes mixtes ($\mathbf{U} = U^\lambda{}_\mu \mathbf{e}_\lambda \otimes \mathbf{e}^\mu$). Notons que l'on doit généralement distinguer le tenseur $U^\lambda{}_\mu$, élément de $E_n \otimes E_n^*$ du tenseur $U_\lambda{}^\mu$ défini sur $E_n^* \otimes E_n$ [**32**].

Les relations de passage (.40), (.41) et (.42), ainsi que les définitions qui s'y rapportent, se généralisent sans difficultés au cas de tenseurs d'ordre supérieur à 2. Ainsi, un tenseur $\mathbf{U}$ d'ordre m, p fois contravariant et q fois covariant ($m = p + q$) se décomposera sur une base associée où interviennent p fois les vecteurs de la base $(\mathbf{e}_\lambda)$ et q fois les vecteurs de la base réciproque $\left(\mathbf{e}^\mu\right)$.

A.3.2 Opérations sur les tenseurs

L'*addition* de tenseurs du même ordre, rapportés à une même base, constitue une première opération sur les tenseurs. Les composantes contravariantes, covariantes ou mixtes de la somme s'obtiennent alors respectivement par simple addition des composantes correspondantes des tenseurs additionnés.

Généralisant le produit tensoriel de vecteurs, la *multiplication tensorielle* d'un tenseur de l'espace $E_n^{(r)}$ par un tenseur de l'espace $E_n^{(s)}$ permet par ailleurs de former des tenseurs d'ordre $r + s$ de l'espace produit tensoriel $E_n^{(r)} \otimes E_n^{(s)}$.

Une opération très utile permet par ailleurs de réduire l'ordre d'un tenseur donné par *contraction de ses indices*. Considérons à titre d'illustration un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant, $U^\rho{}_{\lambda\mu}$, et additionnons certaines de ses composantes définies par l'égalité de deux indices, l'un contravariant et l'autre covariant. Si l'on choisit par exemple $\mu = \rho$, il vient immédiatement :

$$V_\lambda = U^1{}_{\lambda 1} + U^2{}_{\lambda 2} + \cdots + U^n{}_{\lambda n} = \delta^\mu_\rho U^\rho{}_{\lambda\mu} \tag{.43}$$

Ainsi, la contraction du tenseur $U^{\rho}{}_{\lambda\mu}$ d'ordre 3 permet de former un tenseur d'ordre 1, c'est à dire un vecteur (on vérifiera que la relation précédente conduit bien à une loi de transformation pour V_λ du type de (.19)). De manière générale, la contraction d'un tenseur réduit son ordre de 2. Dans le cas d'un tenseur d'ordre 2, la contraction d'indice conduit à un scalaire (tenseur d'ordre 0). On peut en particulier considérer la relation (.22) qui définit le produit scalaire de deux vecteurs **x** et **y** comme la contraction du tenseur $U^{\lambda}{}_{\mu} = x^{\lambda} y_{\mu}$ obtenu par multiplication tensorielle des vecteurs **x** et **y**. La succession d'une multiplication tensorielle et d'une contraction d'indices définit une nouvelle opération appelée *multiplication contractée*.

A.3.3 Tenseurs symétriques

Un tenseur $U^{\lambda\mu}$ est dit *symétrique* si toutes ses composantes satisfont aux relations :

$$U^{\lambda\mu} = U^{\mu\lambda} \tag{.44}$$

Transcrites dans une autre base à l'aide des relations (.40), où formulées à partir des composantes covariantes ou mixtes de **U**, ces conditions de symétrie s'écriront de manière similaire. Elles établissent donc bien une propriété intrinsèque du tenseur considéré. Il vient en effet :

$$U^{\lambda}{}_{\mu} = g_{\rho\mu} U^{\lambda\rho} = g_{\rho\mu} U^{\rho\lambda} = U_{\mu}{}^{\lambda} \tag{.45}$$

Ainsi, la forme mixte d'un tenseur symétrique peut s'écrire simplement U^{λ}_{μ}, sans précision de l'ordre des indices.

On obtient de même :

$$U_{\lambda\mu} = U_{\mu\lambda} \tag{.46}$$

A titre d'exemple, on peut citer le *tenseur de déformation* en mécanique des milieux continus qui, dans l'hypothèse des petites déformations, se définit en fonction des composantes u_i du *vecteur déplacement* à l'aide d'une expression manifestement symétrique :

$$S_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{.47}$$

Remarquons que l'espace à trois dimensions (indices romains) étant ici rapporté à un repère orthonormé, la position basse des indices dans l'expression du tenseur de déformation doit être considérée comme arbitraire (cf. §A.2.2).

A.3.4 Tenseurs antisymétriques

Un tenseur *antisymétrique* est tel que ses composantes vérifient les relations :

$$U^{\lambda\mu} = -U^{\mu\lambda} \tag{.48}$$

Considérons par exemple le cas du *tenseur vitesse de rotation instantanée* $\Omega^{i}{}_{k}$ qui, à tout rayon vecteur **OM** d'un solide en rotation, associe sa dérivée temporelle. Le

point M ayant pour coordonnées $\left(x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z\right)$ dans un repère fixe, ce tenseur est défini par :

$$\frac{dx^i}{dt} = \Omega^i{}_k x^k \tag{.49}$$

La norme de **OM** restant constante au cours du temps (solide indéformable), il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(x_i x^i\right) &= x_i \frac{dx^i}{dt} + x^k \frac{dx_k}{dt} = x_i \Omega^i{}_k x^k + x^k g_{jk} \frac{dx^j}{dt} \\ &= x_i \Omega^i{}_k x^k + x^k g_{jk} \Omega^j{}_l g^{il} x_i = \left(\Omega^i{}_k + \Omega_k{}^i\right) x_i x^k = 0\end{aligned} \tag{.50}$$

ce qui impose :

$$\Omega^i{}_k = -\Omega_k{}^i \tag{.51}$$

Notons que, si le repère est orthonormé, la condition d'antisymétrie s'écrira simplement $\Omega_{ik} = -\Omega_{ki}$.

A.3.5 Pseudo-vecteurs

L'ensemble des tenseurs d'ordre 2 antisymétriques constitue un sous-espace vectoriel de $E_n^{(2)}$ dont la dimension est égale à $(n-1)\,n/2$. Ainsi, dans le cas particulier de l'espace à 3 dimensions, un tel tenseur est représenté par une matrice 3×3 construite à partir de trois grandeurs indépendantes seulement (les éléments diagonaux sont identiquement nuls et les triangles inférieurs et supérieurs sont constitués d'éléments opposés deux à deux). Dès lors, dans l'espace à trois dimensions, le nombre de grandeurs indépendantes constituant un tenseur d'ordre 2 antisymétrique se confond avec la dimension de l'espace vectoriel de référence. On peut donc adjoindre au tenseur initial un *pseudo-vecteur* construit à partir des 3 composantes indépendantes qui le constituent.

Reprenant l'exemple du tenseur vitesse de rotation, le tableau associé à $\Omega^i{}_k$ peut s'écrire :

$$\left[\Omega^i{}_k\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{.52}$$

Les composantes du vecteur dérivée sont alors données par :

$$\left[\frac{dx^i}{dt}\right] = \left[\Omega^i{}_k\right]\left[x^k\right] = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} \tag{.53}$$

ce que l'on écrira encore, en utilisant le symbole d'antisymétrie introduit à la section A.1.2 :

$$\frac{dx^i}{dt} = \epsilon^i{}_{jk} \omega^j x^k \tag{.54}$$

avec $\left(\omega^1 = \omega_x, \omega^2 = \omega_y, \omega^3 = \omega_z\right)$.

Rangées sous la forme d'une matrice uni-colonne, les quantités ω_x, ω_y, ω_z constituent les éléments d'un *pseudo-vecteur* Ω, adjoint du tenseur antisymétrique $\Omega^i{}_k$. La dérivée du vecteur **x** prend alors la forme classique d'un *produit vectoriel*, conformément à la relation bien connue en mécanique du solide :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \Omega \wedge \mathbf{x} \qquad (.55)$$

Soulignons que la grandeur Ω n'est pas assujettie aux mêmes lois de transformation que celles qui caractérisent les « vrais » vecteurs (d'où la dénomination de pseudo-vecteur). On remarquera en effet qu'un changement de repère portant, par exemple, sur le sens de l'axe des x (les deux autres axes conservant leur orientation) conduit par principe à une inversion de signe des composantes selon Ox des vrais vecteurs **x** et $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, sans que ne soient affectées leurs composantes selon Oy et Oz. En vertu de la relation (.53), ces règles de transformation imposent que les composantes de Ω varient quant à elles en sens contraire, ω_y et ω_z changeant de signe tandis que celui de ω_x se conserve (Ω se transforme en l'opposé de son symétrique dans la réflexion d'espace considérée). Ainsi, l'écriture « vectorielle » associée à la relation (.55) dépend implicitement d'une convention d'orientation des axes du repère. De ce fait, on aura souvent recours à diverses astuces pour exploiter correctement ce type de formulation (« règle des trois doigts », « règle du tire-bouchon », etc.). En revanche, l'écriture tensorielle correspondant à la relation (.49) traduit une loi générale, indépendante des conventions d'orientation adoptées pour le système de référence.

A.3.6 Cas particulier de la relativité restreinte

Dans le contexte de l'espace à quatre dimensions muni de la métrique définie par (.35), on montre qu'un tenseur d'ordre 2 antisymétrique peut se mettre sous la forme :

$$\left[U^{\lambda\mu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -v_x & -v_y & -v_z \\ v_x & 0 & -w_z & w_y \\ v_y & w_z & 0 & -w_x \\ v_z & -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad (.56)$$

où **v** désigne un vecteur (vrai) de l'espace à trois dimensions et **w** un pseudo-vecteur.

Tel est le cas du tenseur champ électromagnétique $F^{\lambda\mu} = \left(\frac{\mathbf{E}}{c}, \mathbf{B}\right)$ considéré à la section (2.1), tenseur dont les composantes ont trait d'une part au champ électrique **E** (vrai vecteur de l'espace à trois dimensions) et, d'autre part, au champ magnétique **B** (pseudo-vecteur).

À l'instar des règles établies pour les vecteurs à la section (A.2.6), l'abaissement ou l'élévation d'un indice spatial change le signe du terme correspondant (par exemple :

$U^{01} = -U^{0}{}_{1}$) tandis que sa valeur se conserve dans le cas d'un indice temporel ($U^{30} = U^{3}{}_{0}$).

Tableau .1 Définition des principaux tenseurs du champ électromagnétique

$$\left[\mathcal{F}^{\lambda\mu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\mathbf{E}}{c}, \mathbf{B}\right)$$

(tenseur du champ électromagnétique dans le vide)

$$\left[\mathcal{F}_*^{\lambda\mu}\right] = \left[\frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu\rho\sigma}\mathcal{F}_{\rho\sigma}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{B}, -\frac{\mathbf{E}}{c}\right)$$

(tenseur adjoint du champ électromagnétique dans le vide)

$$\left[\mathcal{G}^{\lambda\mu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -cD_x & -cD_y & -cD_z \\ cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = (c\mathbf{D}, \mathbf{H})$$

(tenseur du champ électromagnétique dans la matière)

$$\left[\mathcal{M}^{\lambda\mu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -cP_x & -cP_y & -cP_z \\ cP_x & 0 & \frac{J_z}{\mu_0} & -\frac{J_y}{\mu_0} \\ cP_y & -\frac{J_z}{\mu_0} & 0 & \frac{J_x}{\mu_0} \\ cP_z & \frac{J_y}{\mu_0} & -\frac{J_x}{\mu_0} & 0 \end{pmatrix} = \left(c\mathbf{P}, -\frac{\mathbf{J}}{\mu_0}\right)$$

(tenseur des moments)

Enfin, un tenseur particulièrement utile en électrodynamique relativiste correspond au tenseur d'ordre 4 complètement antisymétrique $\epsilon^{\lambda\mu\rho\sigma}$. Généralisant le symbole d'antisymétrie introduit à la section A.1.2, il comporte 12 éléments égaux à +1 (pour des indices correspondant à une permutation paire de la séquence $0, 1, 2, 3$), et 12 éléments égaux à -1 (pour des indices correspondant à une permutation impaire de

la séquence $0, 1, 2, 3$). Les autres éléments sont identiquement nuls. Par conséquent, les éléments non-nuls étant nécessairement associés à 1 indice temporel et 3 indices spatiaux, il vient immédiatement $\epsilon^{\lambda\mu\rho\sigma} = -\epsilon_{\lambda\mu\rho\sigma}$.

Sont rassemblées dans le tableau (.1) les matrices relatives à quelques tenseurs utiles pour le développement de l'électrodynamique des milieux matériels (cf. §2.2.2).

A.4 COORDONNÉES CURVILIGNES

Dans le cadre de l'étude d'objets présentant des propriétés de symétrie particulières (symétrie de révolution), il est naturel de chercher à décrire les lois de la physique en utilisant un paramétrage spatial naturellement adapté à la géométrie considérée. Comparé aux coordonnées *rectilignes* du système *cartésien*, le choix d'un système de *coordonnées curvilignes* adapté permettra alors de simplifier sensiblement la formulation des équations, leur résolution ainsi que l'exploitation pratique des résultats obtenus.

A.4.1 Définition

Partant d'un système de coordonnées rectilignes $\left(x^\lambda\right)$ relatives à un repère orthonormé $\left(O, \mathbf{e}_\lambda^{(o)}\right)$ d'un espace affine $\mathcal{E}_n$, il est possible de définir des *coordonnées curvilignes* $\left(u^\rho\right)$ telles que :

$$x^\lambda = x^\lambda \left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right) \tag{.57}$$

Ces n fonctions étant telles que le jacobien $\left|\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^\rho}\right|$ est non nul (de même que $\left|\dfrac{\partial u^\rho}{\partial x^\lambda}\right|$) dans le domaine de variation considéré, il est également possible d'exprimer les coordonnées curvilignes en fonction des variables initiales :

$$u^\rho = u^\rho \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \tag{.58}$$

À partir de ce premier jeu de coordonnées curvilignes, on pourra en définir de nouvelles en posant :

$$u^\lambda = u^\lambda \left(u'^1, u'^2, \ldots, u'^n\right) \Leftrightarrow u'^\rho = u'^\rho \left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right) \tag{.59}$$

$$\text{avec } \left|\frac{\partial u^\lambda}{\partial u'^\rho}\right| \neq 0 \text{ et } \left|\frac{\partial u'^\rho}{\partial u^\lambda}\right| \neq 0$$

Dans le cas de l'espace à trois dimensions rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(O, \mathbf{e}_1^{(o)}, \mathbf{e}_2^{(o)}, \mathbf{e}_3^{(o)}\right)$, on peut considérer à titre d'exemple le système de *coordonnées cylindriques* $\left(u^1 = r, u^2 = \theta, u^3 = z\right)$. Très utile en particulier pour l'étude

des machines tournantes, ce système est défini par :

$$x^1 = r\cos\theta\,; \quad x^2 = r\sin\theta\,; \quad x^3 = z \tag{.60}$$
$$\text{avec} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \theta < 2\pi$$

On notera que la relation biunivoque entre les coordonnées rectilignes et cylindriques pour un point donné n'est assurée que si l'espace $\mathcal{E}_3$ est privé de la droite confondue avec l'axe Oz.

Les *lignes coordonnées* d'un système de référence sont obtenues en fixant $n-1$ paramètres et en faisant varier celui qui reste. En coordonnées rectilignes, on obtient ainsi des droites parallèles aux axes du repère. Dans le cas général d'un système de coordonnées curvilignes, ces lignes sont des courbes (d'où l'adjectif curviligne). En tout point M de l'espace $\mathcal{E}_n$ se coupent n lignes coordonnées. Les lignes coordonnées du système cylindrique correspondent ainsi aux droites radiales coupant perpendiculairement l'axe Oz, aux droites parallèles à Oz, et aux cercles concentriques centrés sur l'axe Oz (dans un plan perpendiculaire à cet axe).

A.4.2 Repère naturel

En chaque point M de l'espace affine $\mathcal{E}_n$, de coordonnées $\left(x^\lambda\right)$, on peut définir un ensemble de n vecteurs $\mathbf{e}_\rho$ obtenus par :

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u^\rho} = \frac{\partial}{\partial u^\rho}\left(x^\lambda \mathbf{e}_\lambda^{(o)}\right) = \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^\rho}\right)\mathbf{e}_\lambda^{(o)} \tag{.61}$$

À noter que la dérivation dans $\mathcal{E}_n$ est indépendante du choix du point origine, si bien que l'on écrira souvent :

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u^\rho} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^\rho} \tag{.62}$$

Le jacobien $\left|\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^\rho}\right|$ étant non nul, la relation (.61) assure l'indépendance linéaire des n vecteurs $\mathbf{e}_\rho$. Ils forment donc une base de E_n, appelée *base naturelle*. Associée au point M, cette base définit le *repère naturel* $\left(M, \mathbf{e}_\rho\right)$ du système de coordonnées curvilignes au point considéré.

Reprenant l'exemple des coordonnées cylindriques de l'espace à trois dimensions, il vient immédiatement :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos\theta \mathbf{e}_1^{(o)} + \sin\theta \mathbf{e}_2^{(o)} \\ \mathbf{e}_2 = -r\sin\theta \mathbf{e}_1^{(o)} + r\cos\theta \mathbf{e}_2^{(o)} \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^{(o)} \end{cases} \tag{.63}$$

On remarque que les vecteurs $\mathbf{e}_1$ (colinéaire à $\mathbf{OM}$ et de même sens), $\mathbf{e}_2$ (tangent au cercle passant par M, centré sur l'axe Oz et contenu dans un plan perpendiculaire

à Oz) et $\mathbf{e}_3$ sont orthogonaux. Les coordonnées cylindriques constituent dès lors un système de *coordonnées curvilignes orthogonales*.

Enfin, considérant le passage d'un système de coordonnées curvilignes $\left(u^\lambda\right)$ à un autre $\left(u'^\rho\right)$, on obtient pour les vecteurs des bases correspondantes :

$$\mathbf{e}'_\rho = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u'^\rho} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^\lambda}\frac{\partial u^\lambda}{\partial u'^\rho} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u'^\rho}\mathbf{e}_\lambda \qquad (.64)$$
$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial u'^\rho}{\partial u^\lambda}\mathbf{e}'_\rho$$

Quant aux relations concernant les composantes d'un vecteur $\mathbf{x}$ quelconque, elles sont telles que :

$$\mathbf{x} = u^\lambda \mathbf{e}_\lambda = u^\lambda \frac{\partial u'^\rho}{\partial u^\lambda}\mathbf{e}'_\rho = u'^\rho \mathbf{e}'_\rho = u'^\rho \frac{\partial u^\lambda}{\partial u'^\rho}\mathbf{e}_\lambda \qquad (.65)$$

d'où :

$$u^\lambda = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u'^\rho}u'^\rho \qquad (.66)$$
$$u'^\rho = \frac{\partial u'^\rho}{\partial u^\lambda}u^\lambda$$

Par conséquent, identifiant ces relations avec les lois de transformations établies au cours des sections A.1 et A.2 (en faisant $\dfrac{\partial u^\lambda}{\partial u'^\rho} = \mathcal{P}^\lambda_\rho$ et $\dfrac{\partial u'^\rho}{\partial u^\lambda} = \mathcal{P}'^\rho_\lambda$), on vérifie bien que les composantes (contravariantes) u^λ se transforment de manière contraire aux vecteurs de base (covariants) $\mathbf{e}_\lambda$.

A.4.3 Métrique en coordonnées curvilignes

Dans le cas général, les vecteurs de la base naturelle varient d'un point à un autre et ne sont pas tous normés. Ils définissent ainsi une métrique dont le tenseur fondamental $g_{\lambda\mu}$ doit être attaché à chaque point de l'espace affine considéré. Ainsi, dans le cas du système de coordonnées cylindriques, les composantes de ce tenseur sont données par :

$$\left\{\begin{array}{c} g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1\,;\, g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = r^2\,;\, g_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \\ g_{ik} = 0 \text{ pour } i \neq k \end{array}\right. \qquad (.67)$$

La différentielle du vecteur $\mathbf{OM}$ (qui ne dépend que du point M choisi) s'écrivant :

$$d\mathbf{OM} = d\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^\rho}du^\rho = du^\rho \mathbf{e}_\rho \qquad (.68)$$

les quantités du^ρ apparaissent comme les composantes contravariantes du vecteur $d\mathbf{M}$ rapporté au repère naturel $\left(M, \mathbf{e}_\rho\right)$. En vertu de la relation (.34), la distance entre deux points infiniment voisins de $\mathcal{E}_n$ s'écrit alors dans le repère naturel :

$$(ds)^2 = g_{\rho\sigma}du^\rho du^\sigma \qquad (.69)$$

Dans le cas de l'espace à trois dimensions, la métrique en coordonnées cylindriques est ainsi donnée par :

$$(ds)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (.70)$$

Remarquons enfin que l'on a généralement avantage, en physique, à exprimer la norme d'un vecteur et ses composantes avec une seule et même unité. À cette fin, il suffit de rapporter les grandeurs vectorielles considérées à un repère *normé* obtenu en divisant chaque vecteur de base par sa propre norme. Dans le cas des coordonnées cylindriques par exemple, le repère $\left(M, \mathbf{e}_1, \frac{1}{r}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right)$ constitue le repère naturel normé au point M. Par conséquent, si $\left(v^1, v^2, v^3\right)$ désignent les composantes (contravariantes) d'un vecteur $\mathbf{v}$ rapporté au repère naturel en M, les composantes de $\mathbf{v}$ par rapport au repère naturel normé seront $\left(\sqrt{g_{11}}v^1 = v^1, \sqrt{g_{22}}v^2 = rv^2, \sqrt{g_{33}}v^3 = v^3\right)$. De même pour les coordonnées covariantes (v_1, v_2, v_3) qui, exprimées par rapport à une base réciproque normée $\left(\mathbf{e}^1, r\mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\right)$, deviennent $\left(\sqrt{g^{11}}v_1 = v_1, \sqrt{g^{22}}v_2 = \frac{1}{r}v_2, \sqrt{g^{33}}v_3 = v_3\right)$. Les composantes du tenseur métrique vérifient la relation $g_{\lambda\mu}g^{\mu\rho} = \delta^\rho_\lambda$ (cf. section A.2.2), ce qui donne simplement dans le cas particulier des coordonnées cylindriques : $g^{11} = 1/g_{11} = 1$, $g^{22} = 1/g_{22} = 1/r^2$, $g^{33} = 1/g_{33} = 1$. À noter que lorsque la base naturelle est orthogonale, les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur décomposé sur la base naturelle normée seront égales (en coordonnées cylindriques, on vérifie bien en particulier l'identité $\sqrt{g_{22}}v^2 = \sqrt{g^{22}}v_2 = rv^2$).

A.5 DÉRIVATION DES TENSEURS

A.5.1 Opérateur de dérivation

Considérons un *champ de tenseur* $\mathbf{U}(M)$ définit en attachant en chaque point M de l'espace affine $\mathcal{E}_n$ un tenseur $\mathbf{U}$. Ce *tenseur au point M* peut éventuellement dépendre d'autres paramètres. Ainsi, un tenseur *variable* dépendant du temps sera noté $\mathbf{U}(M, t)$. Évaluée en un seul et même point M, la dérivée du tenseur $\mathbf{U}$ par rapport à l'un des paramètres autres que les coordonnées s'obtiendra aisément en généralisant les résultats concernant la dérivation des vecteurs.

L'espace étant rapporté dans un premier temps à un système de coordonnées rectilignes $\left(x^\lambda\right)$, la dérivation des composantes d'un tenseur par rapport aux coordonnées du point considéré forme un nouveau tenseur. On définit ainsi un opérateur de dérivation que nous écrirons, conformément aux règles de la notation indicielle :

$$\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \quad (.71)$$

Soulignons que la position basse de l'indice λ dans l'écriture de cet opérateur est parfaitement cohérente avec son caractère covariant. On a en effet :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \tag{.72}$$

$$\text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \tag{.73}$$

Comparant ces relations avec les lois de transformation (.19) des composantes covariantes d'un vecteur (en faisant $\mathcal{P}'^{\mu}_{\lambda} = \dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}$ et $\mathcal{P}^{\lambda}_{\mu} = \dfrac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}$), la dérivation par rapport à une composante contravariante apparaît ainsi comme un opérateur covariant. Réciproquement, on montre de même que la dérivation par rapport à une composante covariante x_{λ} définit un opérateur contravariant noté ∂^{λ}. On pourra généraliser aux opérateurs différentiels les règles concernant l'abaissement ou l'élévation des indices ($\partial_{\lambda} = g_{\lambda\mu}\partial^{\mu}$; $\partial^{\mu} = g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda}$).

A.5.2 Symboles de Christoffel

Lorsqu'elle est envisagée dans le cadre général d'un système de coordonnées curvilignes, la dérivation ordinaire des composantes d'un vecteur, ou plus généralement d'un tenseur **U**, n'a pas le caractère tensoriel recherché. En effet, le repère (naturel) par rapport auquel les composantes de **U** sont exprimées change d'un point à un autre. Il s'agit donc d'expliciter le calcul de la variation élémentaire de **U**, entre deux points M et M' infiniment voisins, par rapport à un même repère. À cette fin, une première étape consiste à exprimer la variation élémentaire $d\mathbf{e}_{\lambda}$ des vecteurs de base en M et M' par rapport au repère naturel au point M. Cette variation est donnée par :

$$d\mathbf{e}_{\lambda} = \partial_{\rho}\mathbf{e}_{\lambda} du^{\rho} \tag{.74}$$

La décomposition de $\partial_{\rho}\mathbf{e}_{\lambda}$ sur la base naturelle en M s'écrit de manière générale :

$$\partial_{\rho}\mathbf{e}_{\lambda} = \Gamma_{\rho}{}^{\mu}{}_{\lambda}\mathbf{e}_{\mu} = g^{\mu\sigma}\Gamma_{\rho\sigma\lambda}\mathbf{e}_{\mu} \tag{.75}$$

où les quantités $\Gamma_{\rho\sigma\lambda}$ et $\Gamma_{\rho}{}^{\mu}{}_{\lambda}$ désignent respectivement les *symboles de Christoffel* de première et de deuxième espèce.

Il vient alors pour la variation des vecteurs de base :

$$d\mathbf{e}_{\lambda} = g^{\mu\sigma}\Gamma_{\rho\sigma\lambda} du^{\rho}\mathbf{e}_{\mu} \tag{.76}$$

Les symboles de Christoffel s'expriment en fonction des composantes du tenseur fondamental selon la formule [**34**] :

$$\Gamma_{\rho\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\rho}g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda}g_{\sigma\rho} - \partial_{\sigma}g_{\rho\lambda}\right) \tag{.77}$$

Appliquées au cas des coordonnées cylindriques, ces formules donnent (on rappelle que $g_{\lambda\mu}g^{\mu\rho} = \delta^{\rho}_{\lambda}$) :

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{221} = r \,;\, \Gamma_{212} = -r \,;\, \Gamma_{\rho\sigma\lambda} = 0 \quad \text{pour toute autre combinaison des indices} \tag{.78}$$

d'où :

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_1 = g^{22}\Gamma_{221}du^2\mathbf{e}_2 = \big(d\theta/r\big)\,\mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_2 = g^{11}\Gamma_{212}du^2\mathbf{e}_1 + g^{22}\Gamma_{122}du^1\mathbf{e}_2 = (-r\,d\theta)\,\mathbf{e}_1 + \big(dr/r\big)\,\mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_3 = 0 \end{cases} \tag{.79}$$

Notons que les symboles de Christoffel ne doivent pas être assimilés à des tenseurs du troisième ordre. En effet, comparée à la loi de transformation d'un tenseur, la relation de changement de coordonnées à laquelle satisfont ces quantités comporte un terme supplémentaire. Cette relation s'écrira de manière générale :

$$\Gamma_{\rho}{}^{\mu}{}_{\lambda} = \frac{\partial u'^{\mu}}{\partial u^{\beta}}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u'^{\lambda}}\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial u'^{\rho}}\Gamma_{\sigma}{}^{\beta}{}_{\alpha} + \frac{\partial u'^{\mu}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial u'^{\lambda}\partial u'^{\rho}} \tag{.80}$$

Dans le cas particulier où le premier système de coordonnées est rectiligne ($\big(u^{\lambda} = x^{\lambda}\big)$, les $g_{\lambda\mu}$ sont des scalaires et les $\Gamma_{\sigma}{}^{\beta}{}_{\alpha}$ sont nuls), la relation de transformation se réduit au deuxième terme de la relation (.80). L'expression obtenue se révèle alors particulièrement commode pour effectuer le calcul direct des symboles de Christoffel associés aux systèmes de coordonnées curvilignes usuels.

A.5.3 Dérivée covariante

La variation du repère naturel entre deux points infiniment voisins étant déterminée, on peut alors chercher à expliciter la *différentielle absolue* $d\mathbf{U}$ d'un tenseur donné. Afin qu'elle soit évaluée en un seul et même point, cette différentielle est obtenue en retranchant la valeur de **U** au point M à sa valeur en M' *transportée* au point M le long d'une droite (géodésique) de $\mathcal{E}_n$ [**34**].

On définit alors un nouvel opérateur de dérivation appelé *dérivée covariante* du tenseur **U**. Contrairement à la dérivation partielle ordinaire, cet opérateur jouit dans le cas général du caractère tensoriel. Il se révèle ainsi très précieux en physique lorsqu'il s'agit, face aux phénomènes de l'électrodynamique notamment, d'établir une loi intrinsèquement liée à la réalité physique considérée, indépendamment du système de référence choisi.

On montre que les composantes de la dérivée covariante d'un tenseur quelconque (p fois contravariant et q fois covariant) s'obtiennent en ajoutant à la dérivée partielle ordinaire de ses composantes un terme de la forme $U^{\cdots\alpha\cdots}_{\mu_1\cdots\mu_q}\Gamma_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\alpha}$ pour chacun de ses indices contravariants et en retranchant un terme de la forme $U^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\cdots\beta\cdots}\Gamma_{\rho}{}^{\beta}{}_{\lambda}$ pour chacun des indices covariants. En particulier, la dérivée covariante d'un vecteur

v correspond à un tenseur d'ordre 2 dont les composantes covariantes s'expriment conformément à la règle énoncée par :

$$\nabla_\lambda v_\rho = \partial_\lambda v_\rho - v_\beta \Gamma_\rho{}^\beta{}_\lambda \tag{.81}$$

Formulé à l'aide de ses composantes mixtes, cet opérateur linéaire se définit également par la relation :

$$\nabla_\lambda v^\sigma = g^{\rho\sigma} \nabla_\lambda v_\rho = \partial_\lambda v^\sigma + v^\alpha \Gamma_\lambda{}^\sigma{}_\alpha \tag{.82}$$

Reprenant l'exemple des coordonnées cylindriques, un vecteur **v** de composantes (v_r, v_θ, v_z) par rapport à un repère naturel normé (cf. la remarque de la section A.4.3) a pour composantes contravariantes, par rapport à la base naturelle $(\mathbf{e}_i)$ au point M, le triplet $\left(v_r, v_\theta/r, v_z\right)$. Dès lors, compte tenu de la valeur particulière des symboles de Christoffel en coordonnées cylindriques (cf. section A.5.2), la formule (.82) donne pour les différentes composantes de la dérivée covariante :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \nabla_1 v^1 = \partial_1 v^1 & ; \quad \nabla_2 v^1 = \partial_2 v^1 + v^2 \Gamma_2{}^1{}_2 & ; \quad \nabla_3 v^1 = \partial_3 v^1 \\ \nabla_1 v^2 = \partial_1 v^2 + v^2 \Gamma_1{}^2{}_2 & ; \quad \nabla_2 v^2 = \partial_2 v^2 + v^1 \Gamma_2{}^2{}_1 & ; \quad \nabla_3 v^2 = \partial_3 v^2 \\ \nabla_1 v^3 = \partial_1 v^3 & ; \quad \nabla_2 v^3 = \partial_2 v^3 & ; \quad \nabla_3 v^3 = \partial_3 v^3 \end{array} \right. \tag{.83}$$

Le tableau associé à la dérivée covariante en coordonnées cylindriques s'écrira donc :

$$\left[\nabla_\lambda v^\sigma\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{.84}$$

Remarquons par ailleurs que la formule donnant la dérivée covariante d'un vecteur **v** peut être déduite de l'expression de sa différentielle absolue. On a en effet :

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= dv^\sigma \mathbf{e}_\sigma + v^\alpha d\mathbf{e}_\alpha \\ &= \partial_\lambda v^\sigma du^\lambda \mathbf{e}_\sigma + v^\alpha \partial_\lambda \mathbf{e}_\alpha du^\lambda \\ &= \left(\partial_\lambda v^\sigma + v^\alpha \Gamma_\lambda{}^\sigma{}_\alpha\right) du^\lambda \mathbf{e}_\sigma \\ &= \left(\nabla_\lambda v^\sigma\right) du^\lambda \mathbf{e}_\sigma \end{aligned} \tag{.85}$$

A.6 OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

A.6.1 Gradient d'un champ de scalaires

Soit $\Phi(M)$ un champ de scalaire d'un espace affine $\mathcal{E}_n$ rapporté à un système de coordonnées curvilignes $\left(u^\lambda\right)$. Les dérivées partielles $\partial_\lambda \Phi$ de ce champ constituent les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 1 (vecteur) appelé *gradient* de Φ et noté $\mathbf{grad}\,\Phi$. Les dérivées de Φ par rapport aux coordonnées covariantes correspondent aux composantes contravariantes du gradient notées $\partial^\mu \Phi$.

On a ainsi :

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \partial_\lambda \Phi \mathbf{e}^\lambda = g^{\lambda\mu}\partial_\lambda \Phi \mathbf{e}_\mu = \partial^\mu \Phi \mathbf{e}_\mu \tag{.86}$$

Dans un système de coordonnées cylindriques normé (cf. la remarque de la section A.4.3), le gradient est donné par :

$$\left[\mathbf{grad}^{i^{(n)}}\,\Phi\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{grad}_r\,\Phi = \sqrt{g_{11}}g^{11}\partial_1\Phi = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \mathbf{grad}_\theta\,\Phi = \sqrt{g_{22}}g^{22}\partial_2\Phi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ \mathbf{grad}_z\,\Phi = \sqrt{g_{33}}g^{33}\partial_3\Phi = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{.87}$$

A.6.2 Gradient d'un champ de vecteurs

Considérant un champ de vecteur $\mathbf{v}(M)$ de $\mathcal{E}_n$, on peut étendre la notion de gradient au cas des vecteurs en définissant le *gradient vectoriel* construit à partir de la dérivée covariante de $\mathbf{v}$ conformément à la relation :

$$\mathbf{grad}\,\mathbf{v} = \nabla_\lambda v^\mu \mathbf{e}^\lambda \otimes \mathbf{e}_\mu \tag{.88}$$

A.6.3 Divergence d'un champ de vecteurs

La dérivée covariante de $\mathbf{v}$ correspond à un tenseur d'ordre 2. La contraction de ses indices (cf. section A.3.2) permet de former un scalaire pur (tenseur d'ordre 0) appelé divergence de $\mathbf{v}$ et défini par :

$$div\,\mathbf{v} = \nabla_\lambda v^\lambda = \partial_\lambda v^\lambda + v^\alpha \Gamma_\lambda{}^\lambda{}_\alpha \tag{.89}$$

En coordonnées cartésiennes, les symboles de Christoffel sont nuls et la divergence se réduit alors à la somme $\partial_\lambda v^\lambda$. Dans le cas général de coordonnées curvilignes, la formule (.89) revient à calculer la trace de la matrice représentant la dérivée covariante. Ainsi, d'après la relation (.84), la divergence en coordonnées cylindriques s'exprime par :

$$div\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \tag{.90}$$

A.6.4 Divergence d'un champ de tenseur

La dérivée covariante appliquée à un tenseur **U** d'ordre 2 forme un tenseur d'ordre 3. On peut alors, par contraction d'indice, définir un vecteur (tenseur d'ordre 1) appelé *divergence du tenseur* **U**. Décomposé sur la base réciproque, cet opérateur s'écrit :

$$\mathbf{Div}\,\mathbf{U} = \nabla_\lambda U^\lambda{}_\mu \mathbf{e}^\mu \tag{.91}$$

A.6.5 Rotationnel d'un champ de vecteurs

À partir des composantes de la dérivée covariante d'un vecteur **v**, on peut former un tenseur antisymétrique d'ordre 2 appelé *tenseur rotationnel* de **v** et défini, sous sa forme complètement covariante, par :

$$\mathbf{Rot}\,\mathbf{v} = \left(\nabla_\lambda v_\rho - \nabla_\rho v_\lambda\right) \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}^\lambda \tag{.92}$$

Remarquons que, en vertu de la relation (.77) donnant les symboles de Christoffel, ces derniers sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs ($\Gamma_\rho{}^\mu{}_\lambda = \Gamma_\lambda{}^\mu{}_\rho$), d'où l'identité :

$$\nabla_\lambda v_\rho - \nabla_\rho v_\lambda = \partial_\lambda v_\rho - v_\beta \Gamma_\rho{}^\beta{}_\lambda - \partial_\rho v_\lambda + v_\beta \Gamma_\lambda{}^\beta{}_\rho = \partial_\lambda v_\rho - \partial_\rho v_\lambda \tag{.93}$$

Ainsi, le tenseur rotationnel peut être directement construit à partir des composantes de la dérivée partielle ordinaire, en notant bien cependant que, prises indépendamment, les dérivées ordinaires des composantes d'un vecteur ne possèdent pas le caractère tensoriel.

Dans le cas particulier de l'espace à trois dimensions, le tenseur rotationnel s'écrit de manière générale :

$$[\mathbf{Rot}_{ik}\,\mathbf{v}] = \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 & \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 & 0 & \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 \\ \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1 & \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{.94}$$

Conformément aux considérations de la section A.3.5, on peut alors adjoindre au tenseur rotationnel antisymétrique un pseudo-vecteur de l'espace E_3 appelé *vecteur rotationnel*. Dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormé, ce vecteur est défini par :

$$\left[\mathbf{rot}_i^{(o)}\,\mathbf{v}\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{rot}_x\,\mathbf{v} = \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 = \partial v_z/\partial y - \partial v_y/\partial z \\ \mathbf{rot}_y\,\mathbf{v} = \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 = \partial v_x/\partial z - \partial v_z/\partial x \\ \mathbf{rot}_z\,\mathbf{v} = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y \end{pmatrix} \tag{.95}$$

Dans le cas où l'espace tridimensionnel est rapporté à un système de coordonnées curvilignes, le calcul des composantes du rotationnel d'un vecteur **v** défini par ses composantes contravariantes $\left(v^1, v^2, v^3\right)$ peut être mené à partir de la relation (.93), les g_{ik} permettant d'exprimer les composantes covariantes impliquée dans la

formule en fonction des composantes contravariantes. Ainsi, dans le cas des coordonnées cylindriques pour lesquelles les composantes covariantes du vecteur **v** s'expriment par $\left(v_1 = g_{11}v^1 = v_r, v_2 = g_{22}v^2 = g_{22}\left(v_\theta/r\right) = r\,v_\theta, v_3 = g_{33}v^3 = v_z\right)$, il vient pour le vecteur rotationnel exprimé dans un système normé :

$$\left[\mathbf{rot}_i^{(n)}\,\mathbf{v}\right] = \begin{pmatrix} rot_r\,\mathbf{v} = \sqrt{g^{22}}\sqrt{g^{33}}\left(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ rot_\theta\,\mathbf{v} = \sqrt{g^{33}}\sqrt{g^{11}}\left(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3\right) = \dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial r} \\ rot_z\,\mathbf{v} = \sqrt{g^{11}}\sqrt{g^{22}}\left(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\right) = \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \qquad (.96)$$

A.6.6 Laplacien d'un champ de scalaires

Le gradient d'un champ de scalaire $\mathbf{grad}\,\Phi$ étant un vrai vecteur (tenseur d'ordre 1), il est légitime de prendre sa divergence pour former un scalaire pur. Ce scalaire est appelé *laplacien* de Φ et l'opérateur correspondant, noté Δ, est défini par :

$$\Delta\Phi = div\,\mathbf{grad}\,\Phi = \nabla_\lambda\left(\partial^\lambda\Phi\right) = \nabla_\lambda\left(g^{\lambda\mu}\partial_\mu\Phi\right) \qquad (.97)$$

La dérivée covariante pouvant être permutée avec l'opération de changement de variance, on obtient finalement l'expression :

$$\Delta\Phi = g^{\lambda\mu}\nabla_\lambda\left(\partial_\mu\Phi\right) = g^{\lambda\mu}\left(\partial_\lambda\partial_\mu\Phi - \partial_\beta\Phi\Gamma_\lambda{}^\beta{}_\mu\right) \qquad (.98)$$

Dans le cas d'un système de coordonnées rectilignes (les $\Gamma_\lambda{}^\beta{}_\mu$ sont nuls), l'expression du laplacien se réduit à $\Delta\Phi = \partial_\lambda\partial^\lambda\Phi$. Si, en outre, le repère est orthonormé, on obtient une expression de la forme $\Delta\Phi = \partial_\lambda\partial_\lambda\Phi$ qui, dans l'espace à 3 dimensions, s'écrit classiquement :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \qquad (.99)$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cylindriques, la formule (.98) donne :

$$\Delta\Phi = g^{11}\partial_1\partial_1\Phi + g^{22}\left(\partial_2\partial_2\Phi - \partial_1\Phi\,\Gamma_2{}^1{}_2\right) + g^{33}\partial_3\partial_3\Phi \qquad (.100)$$

d'où :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \qquad (.101)$$

A.6.7 Laplacien d'un champ de vecteur

La dérivée covariante d'un vecteur **v** forme un tenseur d'ordre 2 que l'on peut dériver à son tour pour former le *laplacien du vecteur* **v**, conformément à la relation :

$$\Delta\mathbf{v} = \nabla_\lambda\left(\nabla_\mu v^\lambda\right)\mathbf{e}^\mu \qquad (.102)$$

En vertu des règles de formation de la dérivée covariante énoncée à la section A.5.3, le calcul des composantes de $\mathbf{\Delta v}$ s'obtient de manière générale au moyen de la formule :

$$\nabla_\lambda \left(\nabla_\mu v^\lambda\right) = \partial_\lambda \left(\nabla_\mu v^\lambda\right) + \nabla_\mu v^\rho \Gamma_\lambda{}^\lambda{}_\rho - \nabla_\sigma v^\lambda \Gamma_\lambda{}^\sigma{}_\mu \qquad (.103)$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes orthonormé, il vient simplement :

$$\mathbf{\Delta v} = \partial_\lambda \left(\partial_\mu v_\lambda\right) \mathbf{e}_\mu \qquad (.104)$$

soit, pour l'espace à 3 dimensions :

$$\left[\Delta_i^{(o)}\mathbf{v}\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} \end{pmatrix} \qquad (.105)$$

Le calcul du laplacien en coordonnées cylindriques à l'aide de la formule (.103) donne :

$$\left[\Delta_i \mathbf{v}\right] = \begin{pmatrix} \nabla_\lambda \left(\nabla_1 v^\lambda\right) = \partial_1 \left(\nabla_1 v^1\right) + \partial_2 \left(\nabla_1 v^2\right) + \partial_3 \left(\nabla_1 v^3\right) + \nabla_1 v^1 \Gamma_2{}^2{}_1 - \nabla_2 v^2 \Gamma_2{}^2{}_1 \\ \nabla_\lambda \left(\nabla_2 v^\lambda\right) = \partial_1 \left(\nabla_2 v^1\right) + \partial_2 \left(\nabla_2 v^2\right) + \partial_3 \left(\nabla_2 v^3\right) + \nabla_2 v^1 \Gamma_2{}^2{}_1 - \nabla_2 v^1 \Gamma_1{}^2{}_2 - \nabla_1 v^2 \Gamma_2{}^1{}_2 \\ \nabla_\lambda \left(\nabla_3 v^\lambda\right) = \partial_1 \left(\nabla_3 v^1\right) + \partial_2 \left(\nabla_3 v^2\right) + \partial_3 \left(\nabla_3 v^3\right) + \nabla_3 v^1 \Gamma_2{}^2{}_1 \end{pmatrix} \qquad (.106)$$

d'où finalement, exprimé dans un système normé :

$$\left[\Delta_i^{(n)}\mathbf{v}\right] = \begin{pmatrix} \Delta_r \mathbf{v} = \sqrt{g^{11}} \nabla_\lambda \left(\nabla_1 v^\lambda\right) = \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{v_r}{r^2} \\ \Delta_\theta \mathbf{v} = \sqrt{g^{22}} \nabla_\lambda \left(\nabla_2 v^\lambda\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial \theta \partial z} \\ \Delta_z \mathbf{v} = \sqrt{g^{33}} \nabla_\lambda \left(\nabla_3 v^\lambda\right) = \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta \partial z} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (.107)$$

A.6.8 Intégration

On peut établir pour l'intégration des tenseurs une formule très utile permettant de transformer une intégrale de volume en intégrale de surface. Généralisant ainsi le

théorème de Gauss (théorème de la divergence) à un espace de dimension quelconque, cette formule s'écrit en notation indicielle :

$$\int_{(\Omega)} \partial_\lambda v^\lambda d\omega = \int_{(\partial\Omega)} v^\lambda d\sigma_\lambda \tag{.108}$$

où $(\partial\Omega)$ désigne l'hypersurface (variété de dimension 3 dans le cas d'une intégration dans l'espace-temps par exemple) délimitant l'hypervolume (Ω), $d\omega$ et $d\sigma_\lambda$ représentant respectivement l'élément d'hypervolume et l'élément d'hypersurface.

Cette formule vaut également pour les tenseurs et donne ainsi dans le cas d'un tenseur d'ordre 2 :

$$\int_{(\Omega)} \partial_\mu U^{\lambda\mu} d\omega = \int_{(\partial\Omega)} U^{\lambda\mu} d\sigma_\mu \tag{.109}$$

(où $\int U^{\lambda\mu} d\sigma_\mu$ correspond à la $\lambda^{ième}$ composante d'un vecteur de l'espace considéré).

A.7 LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

La particularisation des définitions précédentes au cas de l'espace-temps à quatre dimensions de la relativité restreinte conduit à définir des opérateurs très utiles pour la construction de l'électrodynamique.

Ainsi, conformément aux notations introduites à la section A.2.6, le 4-gradient d'un champ de scalaire $\Phi\left(x^\mu\right)$ correspond aux quadrivecteur défini par :

$$\partial_\lambda \Phi = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \mathbf{grad}\,\Phi\right) \tag{.110}$$

où $\mathbf{grad}\,\Phi$ désigne le gradient de l'espace à trois dimensions.

Quant aux composantes contravariantes du 4-gradient, elles se déduisent simplement de la forme covariante par simple changement de signe des composantes spatiales :

$$\partial^\lambda \Phi = g^{\lambda\mu}\partial_\mu \Phi = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, -\mathbf{grad}\,\Phi\right) \tag{.111}$$

Compte tenu de la forme particulière du tenseur métrique définie par (.35), les symboles de Christoffel sont nuls dans le cadre du système de coordonnées rectilignes précédemment adopté. Les composantes de la dérivée covariante pourront alors être confondues avec les composantes de la dérivée ordinaire.

Par conséquent, la divergence d'un champ de 4-vecteur $\mathbf{Q}\left(x^{\mu}\right) = \left(q^{0}, \mathbf{q}\right)$ est le 4-scalaire $\nabla_{\lambda} Q^{\lambda} = \partial_{\lambda} Q^{\lambda}$ tel que :

$$\partial_{\lambda} Q^{\lambda} = \frac{1}{c}\frac{\partial q^{0}}{\partial t} + div\,\mathbf{q} \qquad (.112)$$

Remarquons que, si Q^{λ} s'identifie au 4-vecteur courant $\mathcal{J}^{\lambda} = (c\rho, \mathbf{j})$, la conservation de la charge électrique revient simplement à écrire la nullité de la 4-divergence de $\mathcal{J}^{\lambda}$.

La définition du rotationnel de l'espace temps se déduit directement de la formule (.93). Enfin, l'opérateur 4-laplacien, généralement dénommé « d'alembertien » et noté $\square$, est défini par :

$$\square\Phi = \nabla_{\lambda}\left(\partial^{\lambda}\Phi\right) = \partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\Phi = \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial t^{2}} - \Delta\Phi \qquad (.113)$$

où $\Delta\Phi$ désigne le laplacien spatial du champ de scalaire Φ.

À l'aide de ces opérateurs, les équations de l'électrodynamique s'écriront de manière très concise, les potentiels scalaire Φ et vecteur $\mathbf{A}$ étant regroupés en un seul et même 4-vecteur $\mathcal{A}^{\lambda} = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right)$.

Bibliographie

[**1**] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Dover Publications, Inc., New York, 1981.

[**2**] J. D. Jackson, *Électrodynamique classique*, Dunod, Paris, 2001.

[**3**] D. C. White and H. H. Woodson, *Electromechanical Energy Conversion*, John Wiley and Sons, New York, 1959.

[**4**] P. Hammond, *Energy Methods in Electromagnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1981.

[**5**] L. Landau et E. Lifchitz, *Électrodynamique des milieux continus*, Editions Mir, traduction française, 1990.

[**6**] G. A. Maugin, *On the Covariant Equations of the Relativistic Electrodynamics of Continua*, Four parts, J. Math. Phys. 19 (1978), pp. 1198-1226.

[**7**] F. C. Moon, *Magneto-solid mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[**8**] P. Vas, *Electrical Machines and Drives*, Clarendon Press, Oxford, 1992.

[**9**] Sir E. Whittaker, *A history of aether and electricity, Vol. 1, The classical theories*, Nelson, London, 1951.

[**10**] L. Leprince-Ringuet, *L'aventure de l'électricité*, Flammarion, 1983.

[**11**] J.C. Pogendorf, *Histoire de la physique*, J. Gabay, 1993.

[**12**] E. Segré, *Les physiciens classiques et leur découvertes, De la chute des corps aux ondes hertziennes*, Fayard, 1987.

[**13**] M. Detienne, J.-P. Vernant, *Les Ruses de l'Intelligence - la Mètis des Grecs*, Flammarion, 1974.

[**14**] W. Gilbert, *De Magnete*, Basic Book, 1958.

[**15**] N. Witkowski, *William Gilbert, philosophe magnétique*, La Recherche 341, (2001), pp. 54-56.

[**16**] L. de Launay, *Le grand Ampère*, Librairie Académique Perrin, 1925.

[**17**] J.-C. Boudenot, *Ampère au coeur de la physique au début du XIXe siècle*, REE 5 (2003), pp. 80-93.

[**18**] A. Ballato, *Piezoelectricity : History and New Thrusts*, IEEE Ultrasonic Symposium (1996), pp. 575-583.

[**19**] M. G. Lippmann, *Principe de la Conservation de l'Electricité*, Ann. Phys. Chim., 24, p. 145 (1881).

[**20**] J. Curie, P. Curie, *Contractions et Dilatations Produites par les Tensions Électriques dans les Cristaux Hémièdres à Faces Inclinées*, Compt. rend., 93, p. 1137 (1881).

[**21**] L. W. McKeehan, *Magnetostriction*, J. of the Franklin Institute, 202, 737, 1926.

[**22**] J. C. Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme, Tome I et II*, J. Gabay, 1989.

[**23**] H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons*, J. Gabay, 1992.

[**24**] B. Guy, *L'éclair et le tonnerre, promenades entre l'espace et le temps*, Publibook, Paris, 2004.

[**25**] L. Pearce Williams, *Michael Faraday*, Chapman and Hall, London, 1965.

[**26**] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, Texte téléchargeable depuis le site de la Royal Institution of Great Britain (www.rigb.org/heritage/faradaypage/html).

[**27**] S. P. Thomson, *Traité théorique et pratique des machines dynamo-électriques*, Librairie Polytechnique C. Béranger, Paris, 1900.

[**28**] J.-M. Martin, *Prospective énergétique mondiale 2050 : les enjeux de la demande*, Medenergie, N°2 (2002).

[**29**] H. Janocha, *Adaptronics and Smart Structures*, Springer-Verlag, 1999.

[**30**] E. Stanewsky, *Adaptative wing and flow control technology*, Progress in Aerospaces Sciences 37 (2001), pp. 583-667.

[**31**] P. Konieczny, A. Bottaro, V. Monturet, B. Nogarede, *Active control of near-wall coherent structures*, FEDSM'2002, Joint US ASME-European Fluids Engineering Summer Conference, Montreal, Quebec (Canada), July 14-18 (2002).

[**32**] L. Schwartz, *Les tenseurs*, Hermann, Paris, 1998.

[**33**] J. Winogradzki, *Les méthodes tensorielles de la physique*, *Tome I et II,* Masson, Paris, 1979 et 1987.

[**34**] J. Hladik, *Le calcul tensoriel en physique*, Masson, Paris, 1995.

[**35**] V. Drivas, L. Rosenthal, Y. Semezis, *La pratique des tenseurs*, Eyrolles, Paris, 1987.

[**36**] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, Éditions Mir, traduction française, 1990.

[**37**] G. Fournet, *Électromagnétisme*, Masson, Paris, 1979.

[**38**] C. Garing, *Électromagnétisme dans la matière - milieux diélectriques (Tome I), milieux magnétiques (Tome II)*, Éditions Ellipses, Paris, 1995.

[**39**] E. du Trémolet de Lacheisserie, *Magnétisme - Fondements (Tome I), Matériaux et Applications (Tome II)*, EDP Sciences, 2000.

[**40**] H. Eschenauer, N. Olhoff, W. Schnell, *Applied Structural Mechanics*, Springer, 1997.

[**41**] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité*, Éditions Mir, traduction française, 1990.

[**42**] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover Publications, New York, 1986.

[**43**] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, 1990.

[**44**] J. P. Perez et A. M. Romulus, *Thermodynamique - Fondements et Applications*, Masson, Paris, 1993.

[**45**] S. H. Crandall, D. C. Karnopp, E. F. Kurtz, D. C. Pridemore-Brown, *Dynamics of mechanical and electromechanical systems*, Krieger Publishing Company, Inc., 1982.

[**46**] I. Bazarov, *Thermodynamique*, Éditions Mir, traduction française, 1989.

[**47**] P. Minotti, A. Ferreira, *Les Micromachines*, Hermes, 1998.

[**48**] O. Rebière, Y. Lefevre, *Conception d'un micro-moteur électrostatique à champ électrique radial*, Revue Internationale de Génie Electrique, Vol. 2 (1999).

[**49**] B. Nogarède, *Machines tournantes : conversion électromécanique de l'énergie*, Techniques de l'Ingénieur (D3410), 2000.

[**50**] H. Gié et Jean-Pierre Sarmant, *Électromagnétisme*, Technique et Documentation, 1996.

[**51**] M. Jouguet, *Traité d'électricité théorique*, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[**52**] J. E. Charon, *Relativité générale*, Éditions René Kister et de la Grange Batelière, 1963.

[**53**] E. Lattard, S. Kurutcharry, M. Lejeune, M. Oudjedi, P. Abelard, *Caractéristiques électromécaniques de céramiques électrostrictives du type* $0.9PbMg_{0.33}Nb_{0.66}O_3$-$0.1PbTiO_3$ *- Applications potentielles*, Colloque MAGELEC (1998), ENSEEIHT, Toulouse.

[**54**] E. du Trémolet de Lacheisserie, *Magnetostriction - Theory and Applications of Magnetoelasticity*, CRC Press, 1993.

[**55**] J. M. Vranish, D. P. Naik, J. P. Teter, *Magnetostrictive direct drive rotary motor development*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 6, (1991).

[**56**] F. Claeyssen, *Analysis of magnetostrictive inchworm motors using f.e.m.*, Proc. Magneto-elastic Effects and Application Conf. Ed. L. Lanotte, Pub. Elsevier, Holland (1993), pp. 161-167.

[**57**] K. Kuhnen, D. J. Jendritza, H. Kickel, *Aktuelle Bauformen und Anwendungspotentiale Elektrochemischer Aktoren*, in Technischer Einsatz Neur Aktoren Expert Verlag (1995), ISBN-3-8169-1235-4.

[**58**] R. Moreau, *Magnetohydrodynamics*, Dordrecht : Kluwer Academic publishers (1990).

[**59**] D. Normile, R. Langreth, *Superconductivity goes to sea*, Popular Science, 1992.

[**60**] J. P Boeuf, A. Bouchoule, « Les propulseurs à plasma pour satellite », Images de la Physique 2003-2004, Éd. CNRS, Département SPM, p. 123 (2004).

[**61**] R. Pelrine, R. Kornbluh, J. Joseph, R. Heydt, Q. Pei, S. Chiba, *High field deformation of elastomeric dielectrics for actuator*, Material and Science Engineering C11 (2000), pp. 89-100.

[**62**] T. W. Duerig, K. N. Melton, D. Stöckel and C. M. Waynman, *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*, Butterworth-Heinemann Ltd., London, 1990.

[**63**] R. H. Engelmann, W. H. Middendorf, *Handbook of Electric Motors*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995.

[**64**] M. Kostenko, L. Piotrovski, *Machines électriques - machines à courant continu, transformateurs (Tome I), machines à courant alternatif (Tome II)*, Éditions Mir, traduction française, 1969.

[**65**] M. Jufer, *Électro-mécanique*, Dunod, Paris, 1986.

[**66**] B. Nogarède, *Machines tournantes : principes et constitution*, Techniques de l'Ingénieur (D3411), 2001.

[**67**] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, C. W. Trowbridge, *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields*, John Wiley & Sons Ltd, 1992.

[**68**] A. Angot, *Compléments de Mathématiques à l'usage des Ingénieurs de l'Electrotechnique et des Télécommunications*, Masson, Paris, 1982.

[**69**] S. Uhea and Y. Tomikawa, *Ultrasonic Motors - Theory and Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[**70**] T. Sashida and T. Kenjo, *An Introduction to Ultrasonic Motors*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[**71**] A. J. Moulson, J. M. Herbert, *Electroceramics - Materials, Properties, Applications*, Chapman&Hall, 1990.

[**72**] B. Nogarède, *Moteurs piézoélectriques*, Techniques de l'Ingénieur (D3765), 1996.

[**73**] E. Dieulesaint, D. Royer, *Ondes élastiques dans les solides*, Masson, Paris, 1974.

[**74**] J. F. Rouchon, P. Kapsa, P. Minotti, L. Buchaillot, R. Duffait, *Modélisation du fonctionnement des moteurs à ultrasons*, Matériaux et Techniques, No. 5-6, (1995), pp. 37-42.

[**75**] M. Géradin, D. Rixen, *Théorie des vibrations*, Masson, Paris, 1992.

[**76**] A. Ferreira, A. Minotti, P. Le Moal, *New multidegree of freedom piezoelectric micromotors for micromanipulator application*, IEEE Ultrasonics Symposium, Seatte, WA, (1995).

[**77**] B. Nogarède, J. F. Rouchon, A. Renotte, *Electroactive materials : towards novel actuation concepts*, 16th International Conference on Electrical Machines - ICEM 2004, Cracow, Poland, September 5-8 (2004).

Index

Q

R

S

T

V

47314 - (I) - (1,2) - OSB 80° - PUB - JME

Achevé d'imprimer sur les presses de
SNEL Grafics sa
rue Saint-Vincent 12 – B-4020 Liège
Tél +32(0)4 344 65 60 - Fax +32(0)4 341 48 41
mai 2005 – 34442

Dépôt légal : juin 2005

Imprimé en Belgique

SCIENCES SUP

Bertrand Nogarède
Préface de Dominique van den Bossche

ÉLECTRODYNAMIQUE APPLIQUÉE

Bases et principes physiques de l'électrotechnique

Science des interactions entre les formes électriques, magnétiques et mécaniques de l'énergie, l'électrodynamique tient une place centrale dans les progrès qui jalonnent le développement de l'ère technologique. Qu'il s'agisse de transformer le mouvement en électricité (générateurs, capteurs) ou, réciproquement, de produire une action mécanique à partir de l'électricité (moteurs, actionneurs), les lois de l'électrodynamique constituent le fondement incontournable de tout processus de conversion électromagnétique de l'énergie. Le présent ouvrage offre un panorama actualisé des différents phénomènes et concepts utilisés dans le domaine, en vue de répondre à des applications de plus en plus variées : du train à grande vitesse aux commandes de vol électriques, en passant par l'assistance cardiovasculaire.

En guise d'introduction, une synthèse historique permet de situer les principales étapes de l'électrodynamique, depuis l'Antiquité jusqu'à ses développements les plus récents. Des exercices et problèmes d'application permettent au lecteur de s'approprier, sur des cas concrets, l'ensemble des concepts et méthodologies introduits dans le cours.

Cet ouvrage s'adresse principalement aux élèves des écoles d'ingénieurs ainsi qu'aux étudiants de master. Compte tenu du caractère relativement pluridisciplinaire de l'exposé présenté, il constitue parallèlement un outil parfaitement approprié pour les ingénieurs désireux de compléter ou d'approfondir leurs connaissances face à un champ d'innovation technologique en plein essor.

BERTRAND NOGARÈDE
est professeur des universités à l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT-ENSEEIHT).

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE
CHIMIE
SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
INFORMATIQUE
SCIENCES DE LA VIE
SCIENCES DE LA TERRE

1er cycle | 2e cycle | 3e cycle
1 2 3 4 5 6 7 8
LICENCE | MASTER | DOCTORAT



ISBN 2 10 007314 1
www.dunod.com
DUNOD